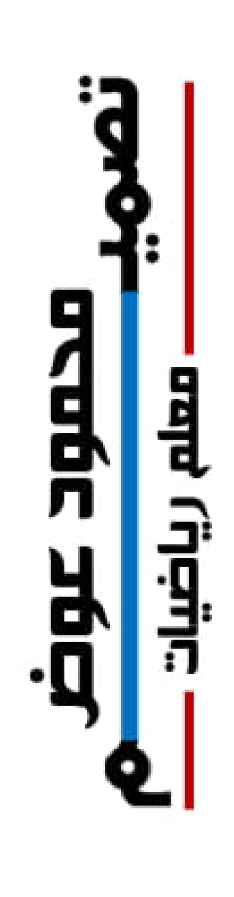
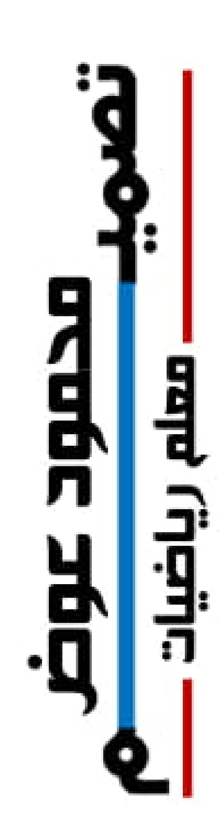












إعداد وتصميم



معلم أول رياضيات



012 025 60 239



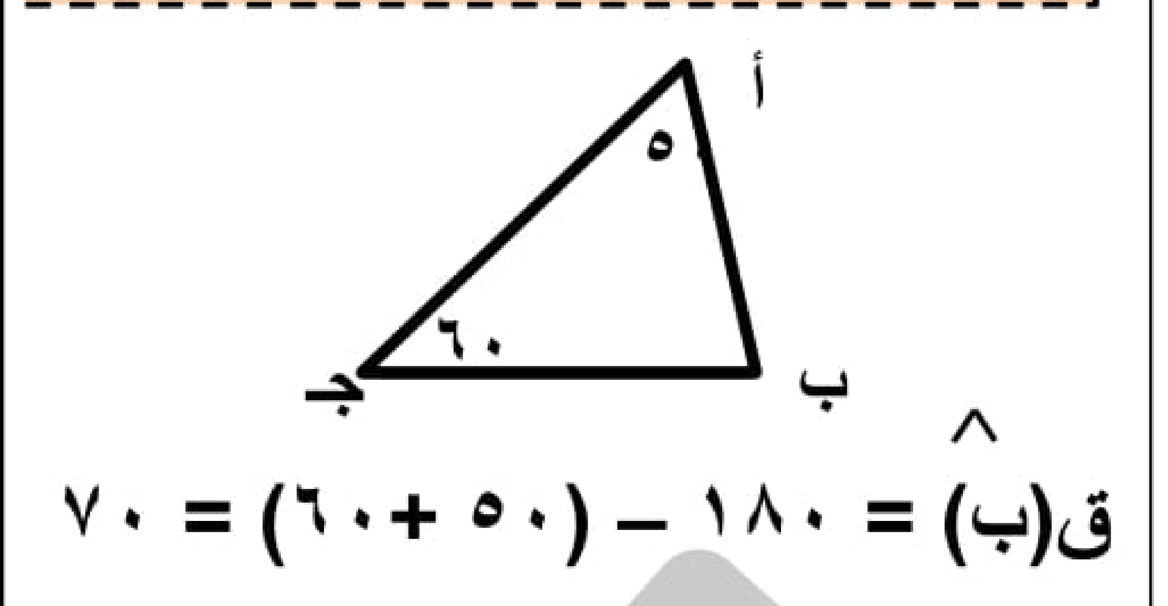


الفهرس

رقم الدرس	الدرس	الصفحة
	الوحدة الرابعة: الدائرة	
	أساسيات تراكمية	١
١	مفاهيم أساسية	٢
٢	أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة	٧
٣	أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة	١٠
٤	علاقة أوتار الدائرة بمركزها	١٤
٥	تعيين الدائرة	١٧
	الوحدة الخامسة: الزوايا والأقواس	
١	الزاوية المركزية وقياس الأقواس	١٩
٢	العلاقة بين المحيطية والمركزية	٢٣
٣	تمارين مشهورة	٢٦
٤	الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس	٢٨
٥	الشكل الرباعى الدائرى	٣٢
٦	اثبات أن الشكل رباعى دائرى	٣٥
٧	العلاقة بين مماسات الدائرة	٤٠
٨	الزاوية المماسية	٤٤
	حل نماذج امتحانات الكتاب المدرسى	٤٨
	ملخص قوانين الهندسة	٥١

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

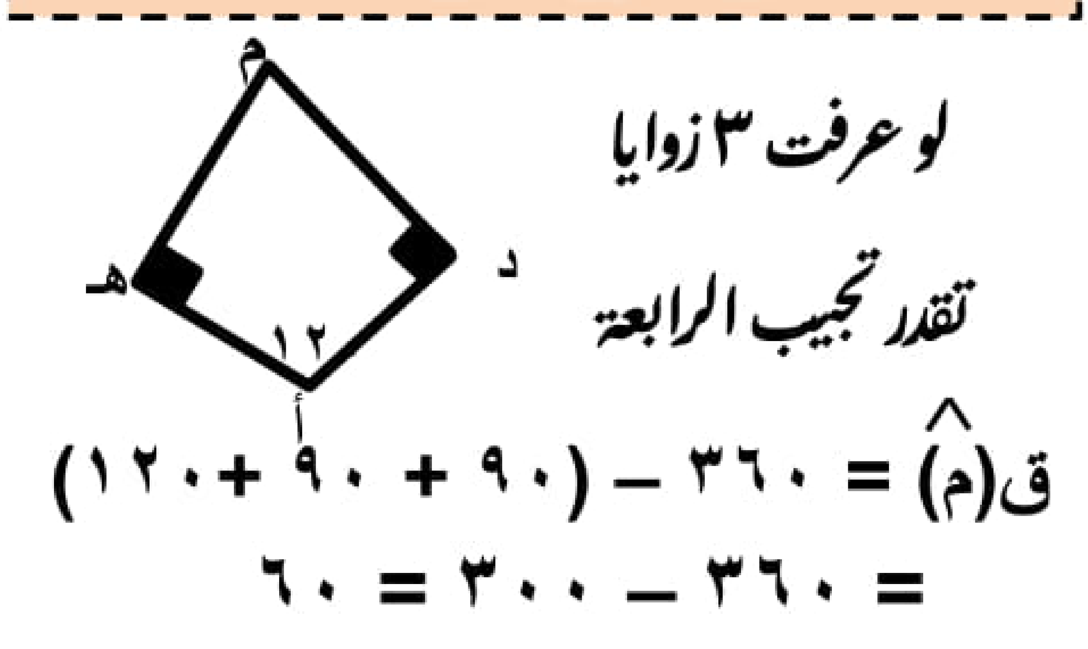
مجموع قياسات زوايا ∆ = ١٨٠



ق(ب^) = ١٨٠ – (٥٠ + ٦٠) = ٧٠

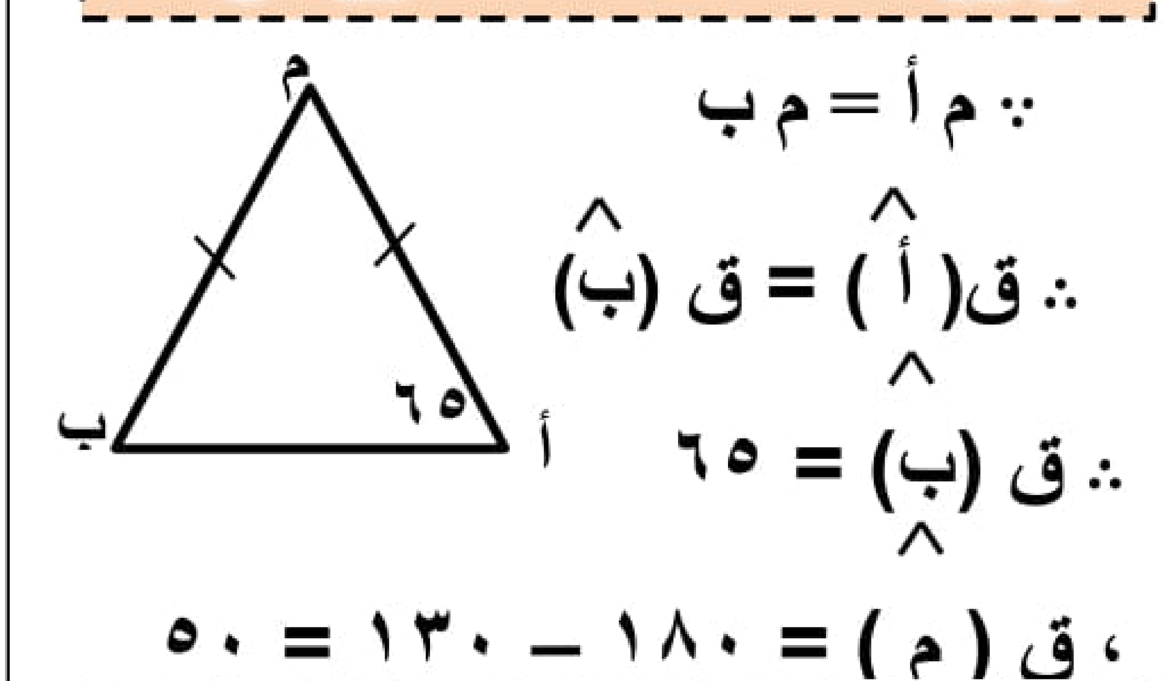
مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠

لو عرفت ٣ زوايا تقدر تجيب الرابعة



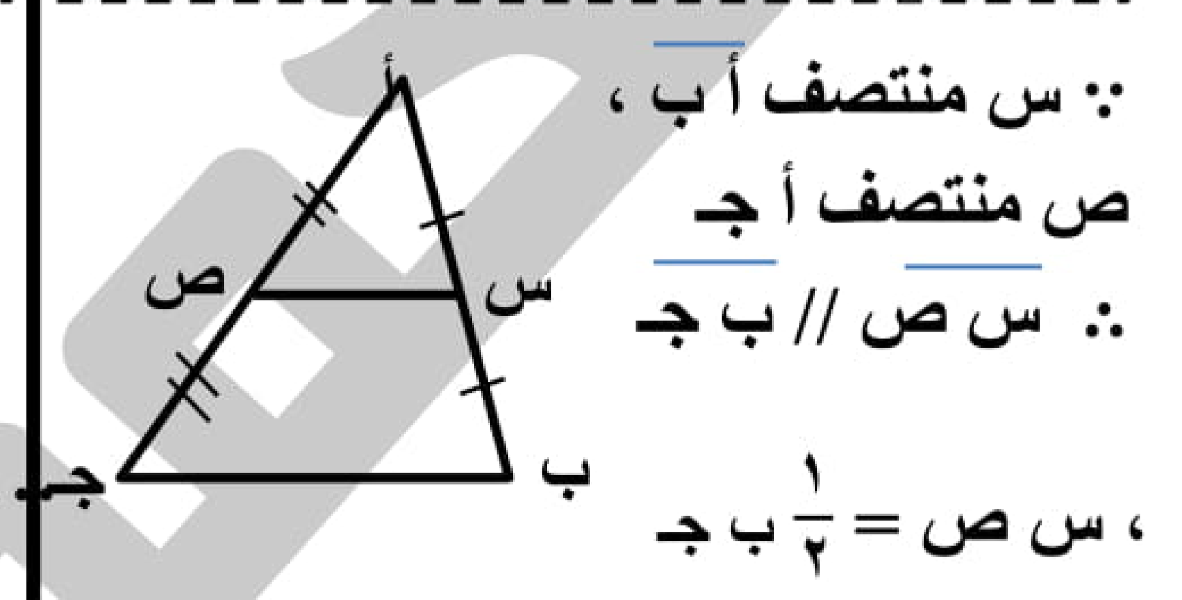
ق(م^) = ٣٦٠ – (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠)
= ٣٦٠ – ٣٠٠ = ٦٠

في المثلث المتساوى الساقين زاويتا القاعدة متساويتان



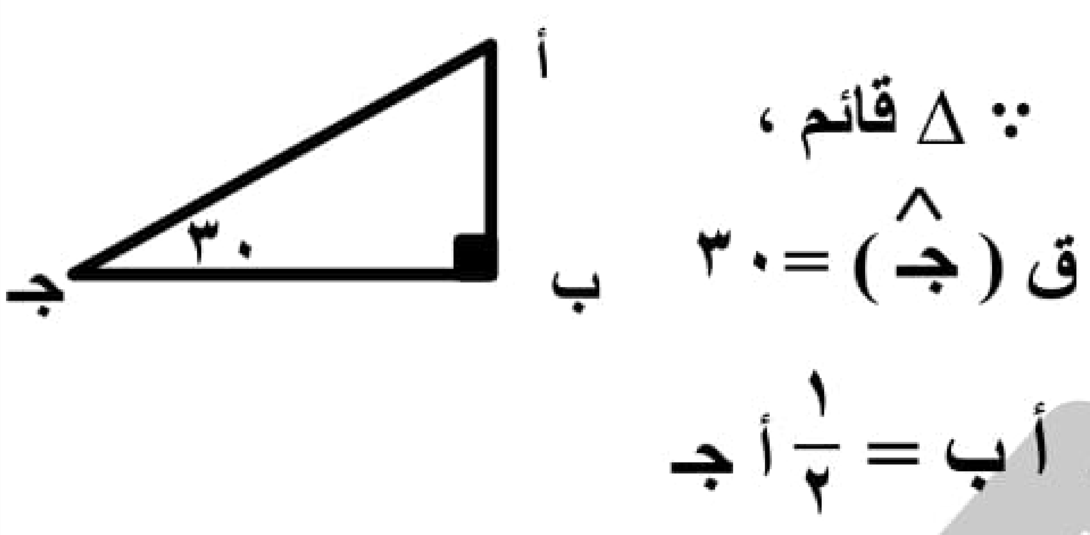
∵ م أ = م ب
∴ ق(أ^) = ق (ب^)
∴ ق (ب^) = ٦٥
، ق (م^) = ١٨٠ – ١٣٠ = ٥٠

القطعة الواصلة بين منتصفى ضلعين توازى الضلع الثالث



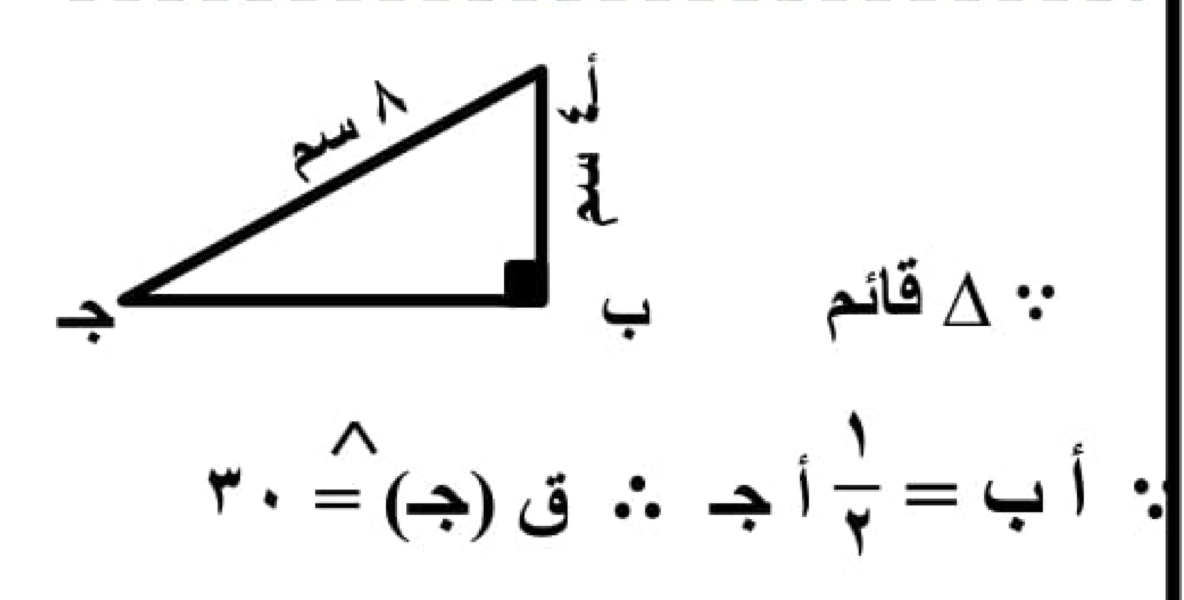
∵ س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ
∴ س ص // ب جـ
، س ص = ١/٢ ب جـ

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر



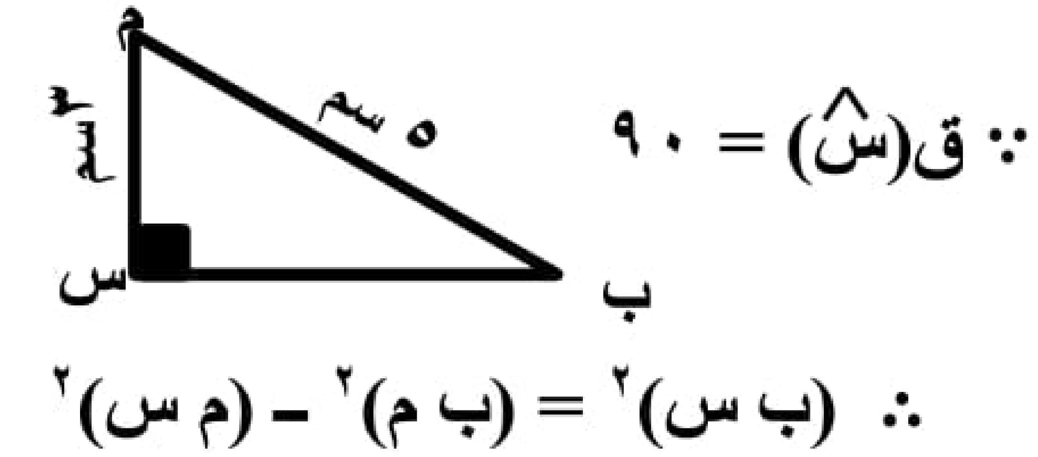
∵ ∆ قائم ، ق (جـ^) = ٣٠
أ ب = ١/٢ أ جـ

إذا كان طول الضلع = نصف طول الوتر فإن الزاوية المقابلة له = ٣٠



∵ ∆ قائم
∵ أ ب = ١/٢ أ جـ ∴ ق (جـ^) = ٣٠

نظرية فيثاغورث



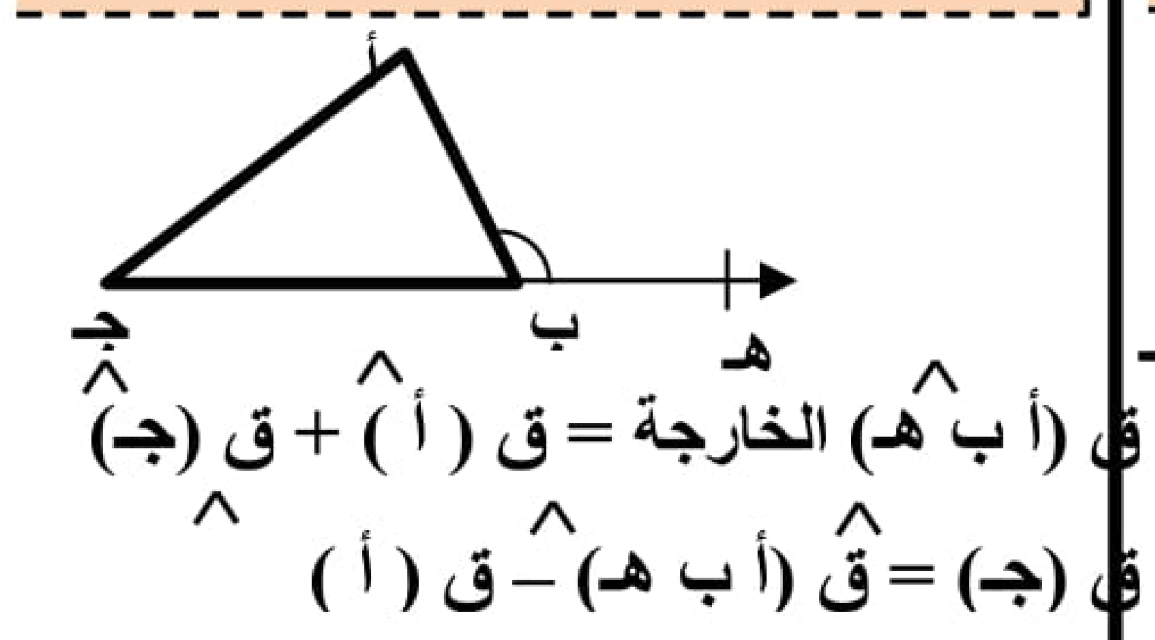
∵ ق(س^) = ٩٠
∴ (ب س)٢ = (ب م)٢ – (م س)٢
= ٢٥ – ٩ = ١٦ ∴ ب س = ٤سم

نظرية إقليدس

∵ ∆ م أ ب قائم ، ب د ⊥ الوتر أ جـ

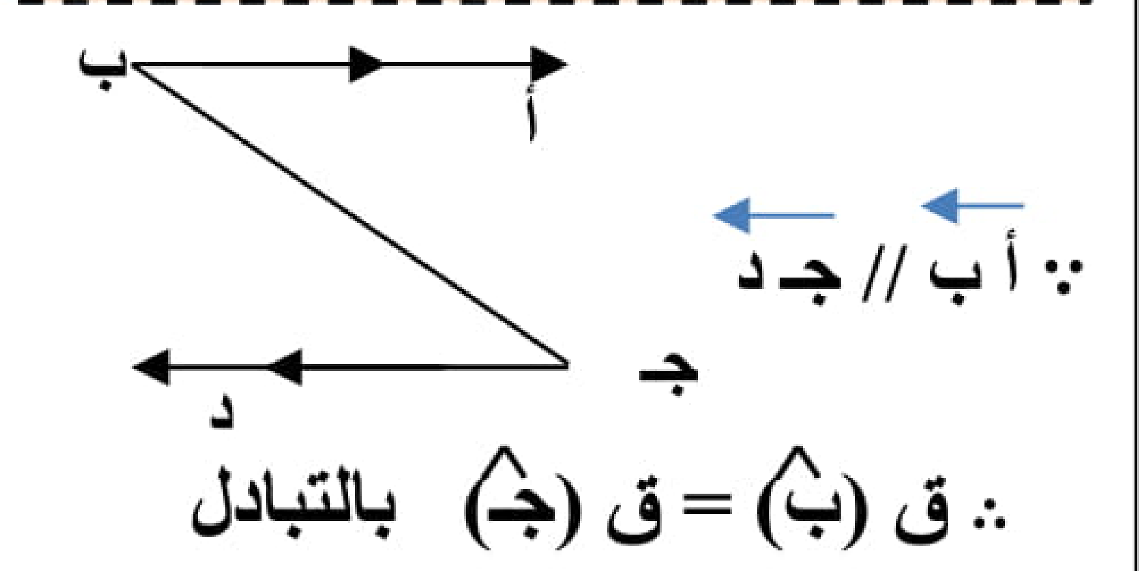
$$ب د = \frac{أ ب \times ب جـ}{أ جـ}$$

قياس الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة



ق (أ ب^ هـ) الخارجة = ق (أ^) + ق (جـ^)
ق (جـ^) = ق (أ ب^ هـ) – ق (أ^)

إذا وجد توازى حرف Z فإن الزاويتان المتبادلتان متساويتان

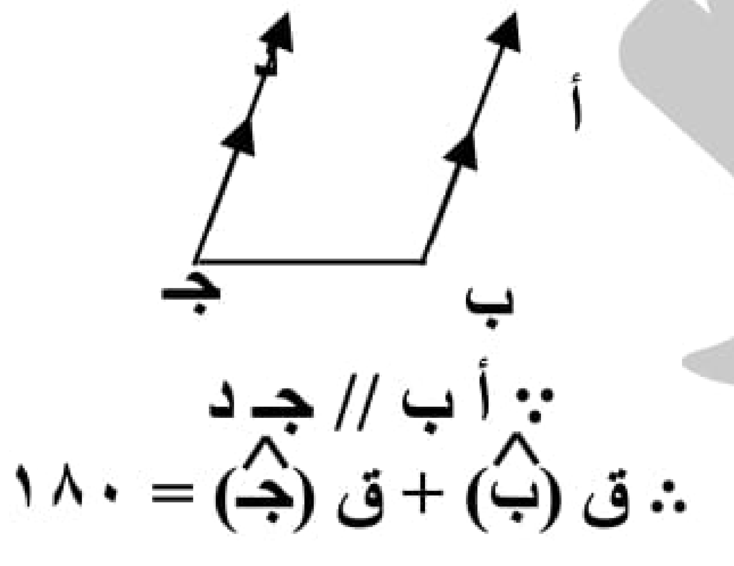


∵ أ ب // جـ د
∴ ق (ب^) = ق (جـ^) بالتبادل

إذا وجد توازى حرف F فإن الزاويتان المتناظرتان متساويتان

∵ س ص // ب جـ
∴ ق (ب^) = ق (س^)
، ق (جـ^) = ق (ص^) بالتناظر

إذا وجد توازى حرف U فإن الزاويتان المتداخلتان متكاملتان



∵ أ ب // جـ د
∴ ق (ب^) + ق (جـ^) = ١٨٠

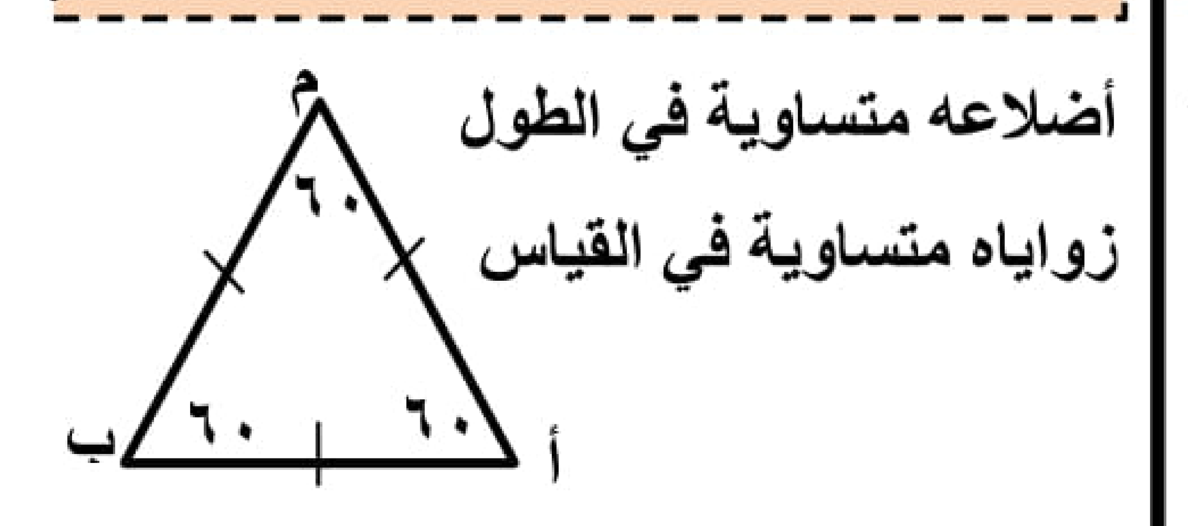
لإثبات التوازى نبحث عن إحدى الحالات الآتية:

- زاويتان متبادلتان متساويتان
- زاويتان متناظرتان متساويتان
- زاويتان متداخلتان متكاملتان

حالات تطابق مثلثين

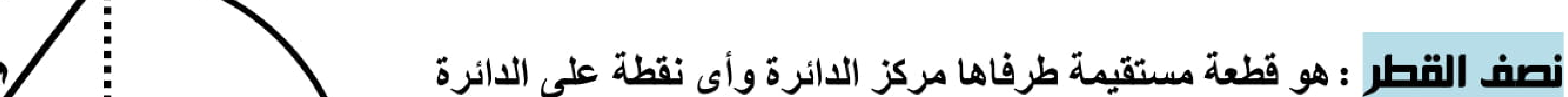
- ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- زاويتان والضلع المرسوم بينهما
- وتر وضلع (في المثلث القائم)

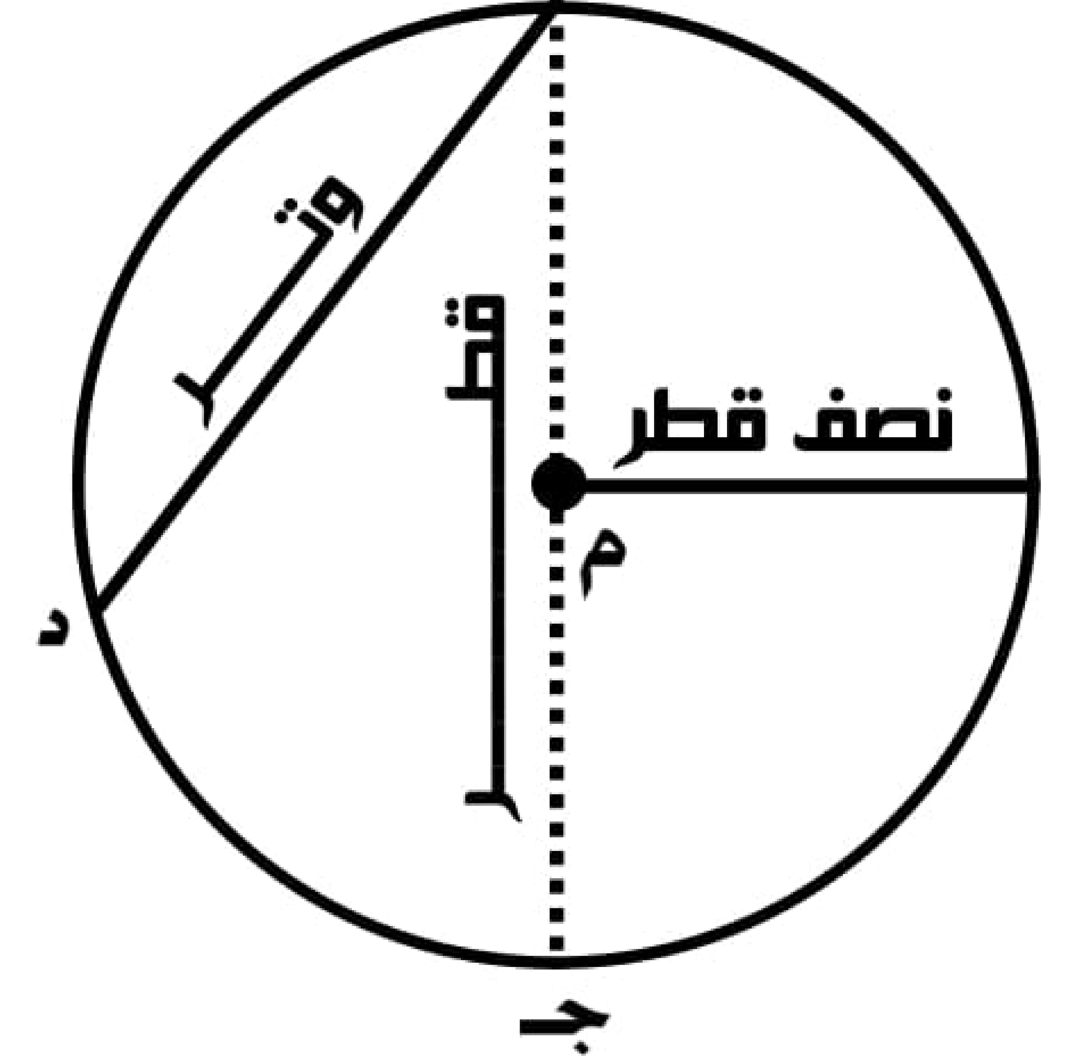
المثلث المتساوى الأضلاع



أضلاعه متساوية في الطول
زواياه متساوية في القياس







نصف القطر : هو قطعة مستقيمة طرفاها مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة

الوتر : هو قطعة مستقيمة طرفاها أي نقطتين على الدائرة

القطر : هو وتر مار بمركز الدائرة ، وهو أطول الأوتار طولا

محور التماثل : **هو المستقيم المار بمركز الدائرة.**

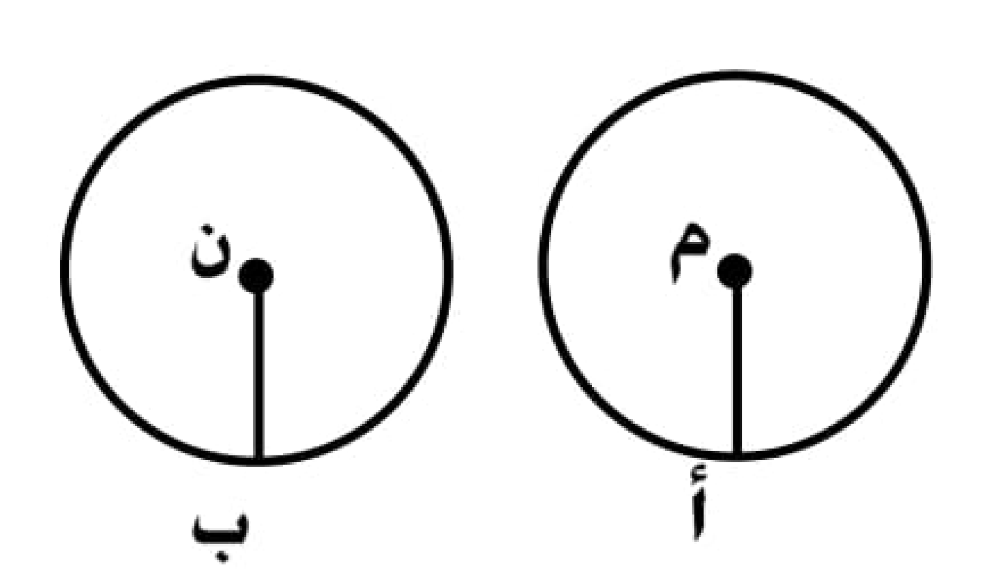
الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التماثل

عدد محاور تماثل نصف أو ربع أو ثلث الدائرة محور واحد

الفرق بين الدائرة وسطح الدائرة

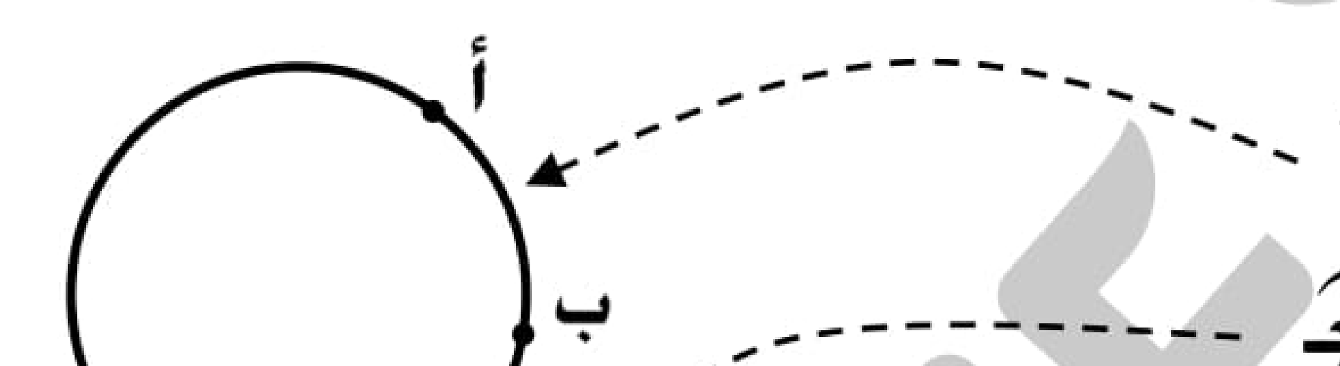
الدائرة	سطح الدائرة	ملحوظة مهمة
الخط الأسود المرسوم ده هو الدائرة	هو الخط الأسود + الجزء المظلل	$\overleftrightarrow{أب}$ ∩ الدائرة م = { أ ، ب } بينما $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ سطح الدائرة = $\overline{أب}$

الدائرتان المتطابقتان : هما دائرتان أنصاف أقطارهما متساوية في الطول.



إذا كانت م ، ن دائرتان متطابقتان فإن م أ = ن ب

القوس : هو جزء من خط الدائرة



من أ إلى ب يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{أب}$

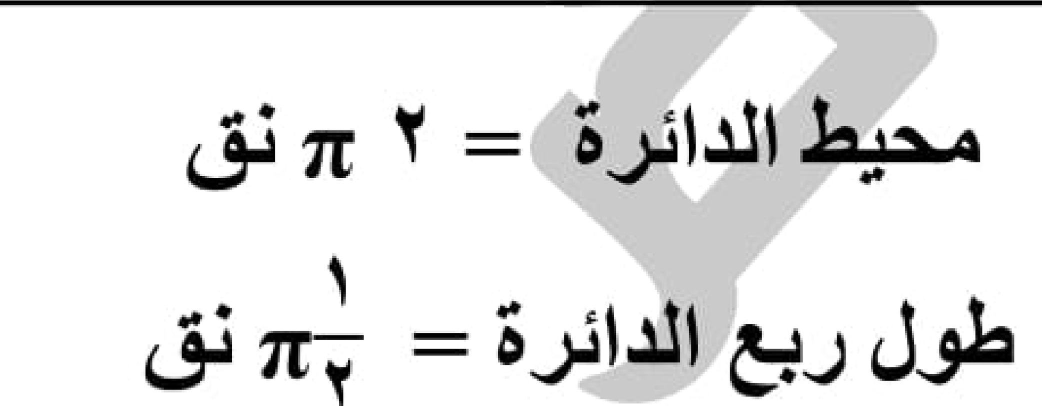
من ب إلى جـ يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{ب جـ}$

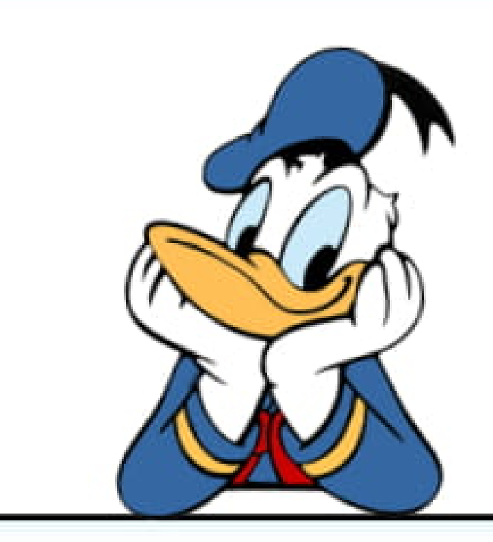


من أ إلى جـ يسمى قوس ويكتب : $\overset{\frown}{أجـ}$ أو $\overset{\frown}{أب جـ}$

ملاحظات : مساحة الدائرة = π نق^2 محيط الدائرة = ٢ π نق

طول نصف الدائرة = π نق   طول ربع الدائرة = $\frac{1}{2}\pi$ نق






نتائج هامة

١ أنصاف الأقطار فى الدائرة الواحدة متساوية فى الطول



∵ م أ ، م ب أنصاف أقطار

∴ م أ = م ب

أى أن : ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{ب}$)

مثال ١



أوجد ق (م $\hat{أ}$ ب)

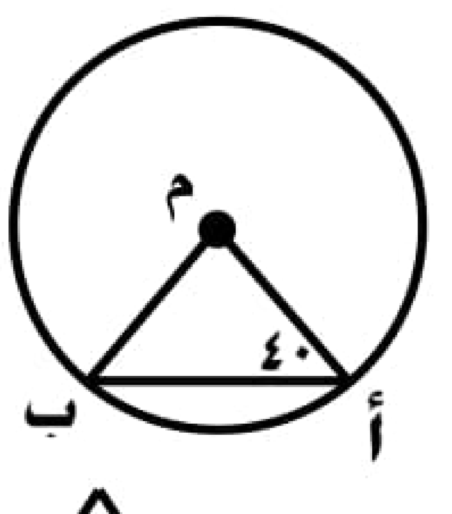
الحل :

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{ب}$)

= $\frac{١٨٠ - ٨٠}{٢}$ = ٥٠

تدريب ١



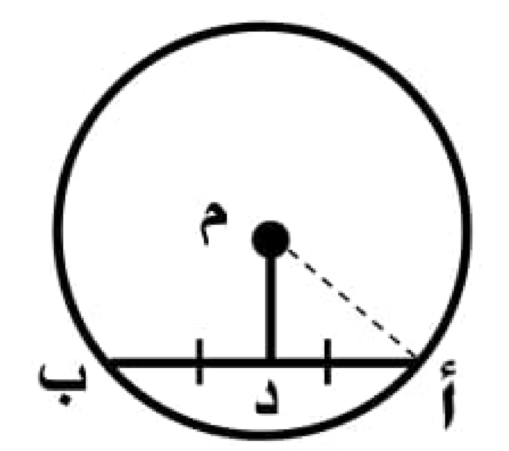
أوجد ق (أ $\hat{م}$ ب)

....

....

....

٢ المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

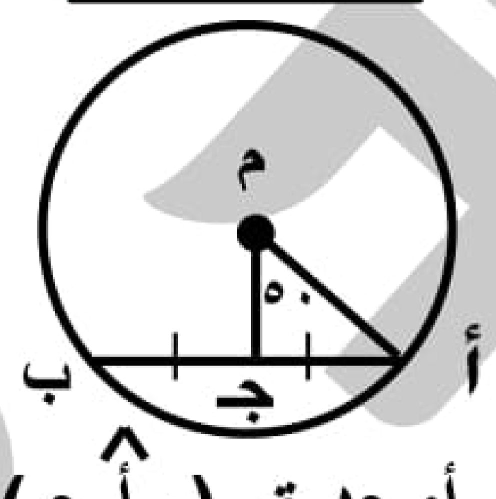


∵ د منتصف الوتر أ ب

∴ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$

∴ ق (م $\hat{د}$ أ) = ٩٠

مثال ٢



أوجد ق (م $\hat{أ}$ جـ)

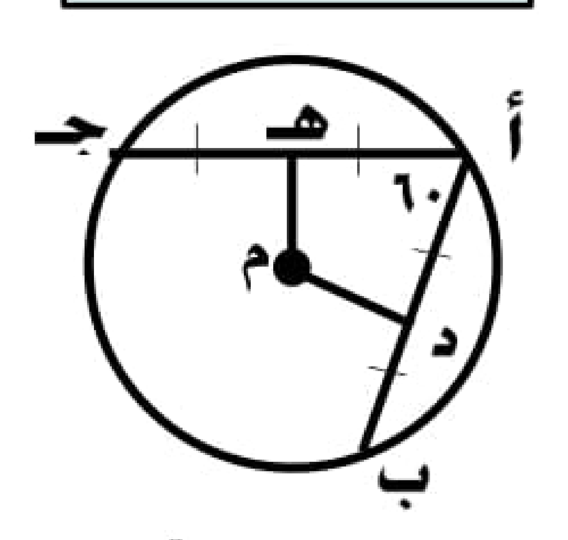
الحل :

∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب

∴ ق (م $\hat{جـ}$ أ) = ٩٠

∴ ق (م $\hat{أ}$ جـ) = ١٨٠ − (٩٠+٥٠) = ٤٠

تدريب ٢



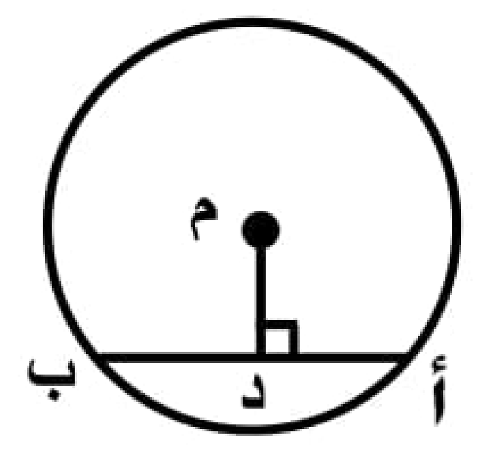
أوجد ق (د $\hat{م}$ هـ)

....

....

....

٣ المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على أى وتر فيها ينصف هذا الوتر

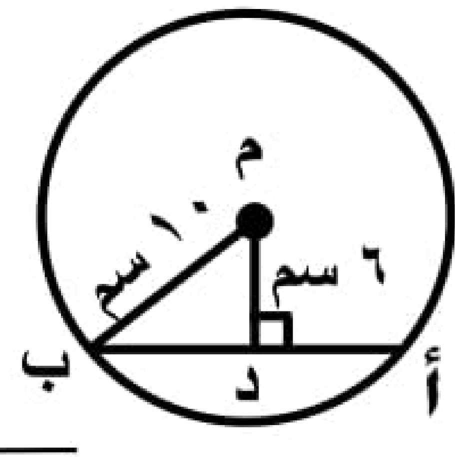


∵ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$

∴ د منتصف أ ب ∴ أ د = د ب

فإذا كان أ ب = ٨سم فإن أ د = ٤سم

مثال ٣



أوجد طول $\overline{أ د}$

الحل :

في Δ م د ب من فيثاغورث

د ب = ٨ سم

∵ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ ∴ د منتصف أ ب

∴ أ د = د ب = ٨ سم

تدريب ٣



أب = ٨ سم أوجد م ب

....

....

....

١ في الشكل المقابل :

د ، هـ منتصفا أب ، أجـ على الترتيب

ق (أ) = ١٢٠°

اثبت أن Δ س ص م متساوى الأضلاع



الحل

∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

∴ ق (م د أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ

∴ ق (م هـ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق (د م هـ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠) = ٦٠°

∴ ق (ص م س) = ٦٠° بالتقابل بالرأس

∵ م ص = م س (أنصاف أقطار)

∴ ق (م ص س) = ق (م س ص) = ٦٠°

∴ Δ س ص م متساوى الأضلاع (جميع زواياه ٦٠°)

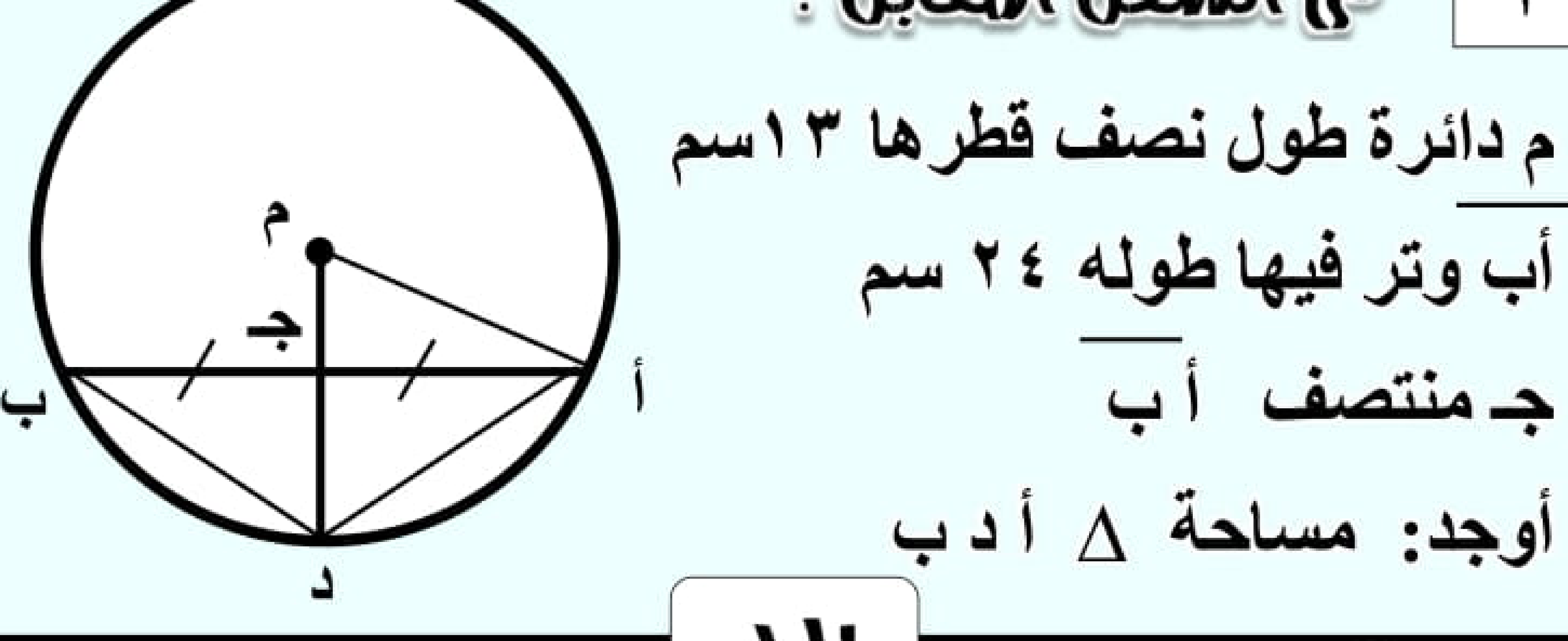
٢ في الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم

أب وتر فيها طوله ٢٤ سم

جـ منتصف أ ب

أوجد: مساحة Δ أ د ب



الحل

∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب ∴ ق (م جـ أ) = ٩٠°

∵ أ ب = ٢٤ سم ∴ أ جـ = ١٢ سم

في Δ م جـ أ القائم : بتطبيق فيثاغورث

∴ (م جـ)^2 = (١٣)^2 − (١٢)^2 = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

∴ م جـ = ٥ سم ، ∵ م د = ١٣ سم

∴ جـ د = ١٣ − ٥ = ٨ سم

∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

∴ مساحة Δ أ د ب = $\frac{1}{2}$ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم^2

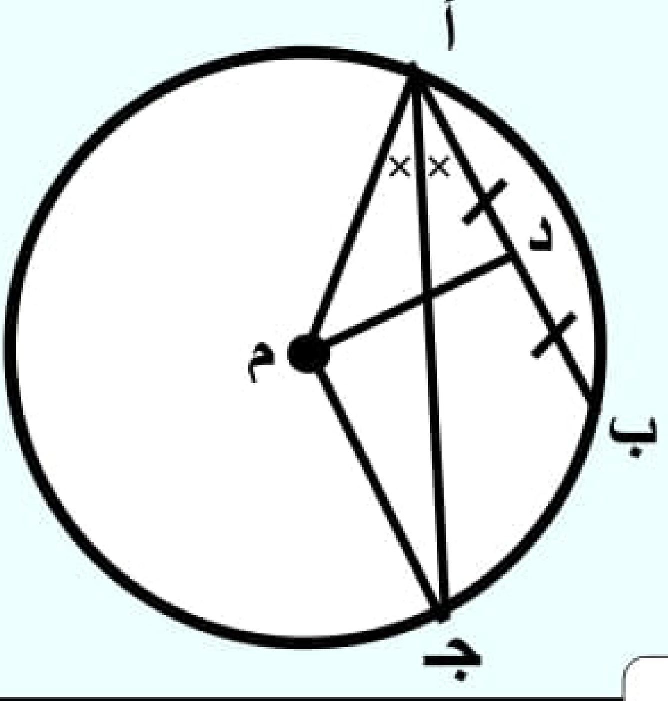
٣ في الشكل المقابل :

أ ب وتر فى الدائرة م

أ جـ ينصف ب أ م

د منتصف أ ب

اثبت أن د م ⊥ م جـ



الحل

في Δ أ م جـ : ∵ م أ = م جـ (أنصاف أقطار)

∴ ق (م أ جـ) = ق (م جـ أ) ⟵ (١)

∵ ق (م أ جـ) = ق (ب أ جـ) ⟵ (٢) معطى

من ١ ، ٢ ينتج أن:

ق (م جـ أ) =ق (ب أ جـ) وهما متبادلتان

∴ أ ب // جـ م

، ∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

∵ أ ب // جـ م ∴ دم ⊥ م جـ

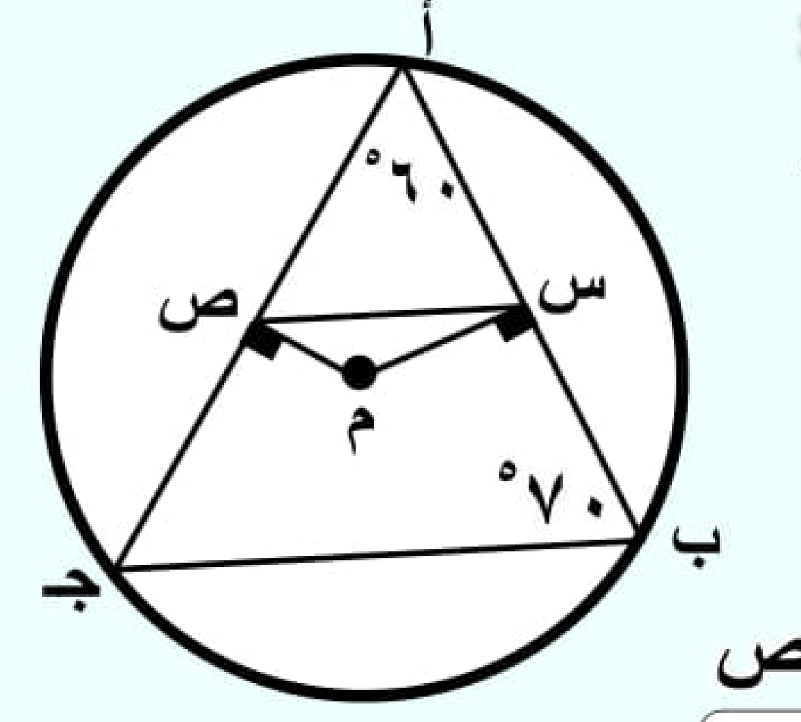
٤ في الشكل المقابل :

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ جـ

ق (أ) = ٦٠°

ق (ب) = ٧٠°

أوجد قياسات زوايا Δ م س ص



الحل

ق (جـ) = ١٨٠ − (٧٠ + ٦٠) = ٥٠°

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب

∵ م ص ⊥ أ جـ ∴ ص منتصف أ جـ

∴ س ص // ب جـ (قطعة واصلة بين منتصفى ضلعين)

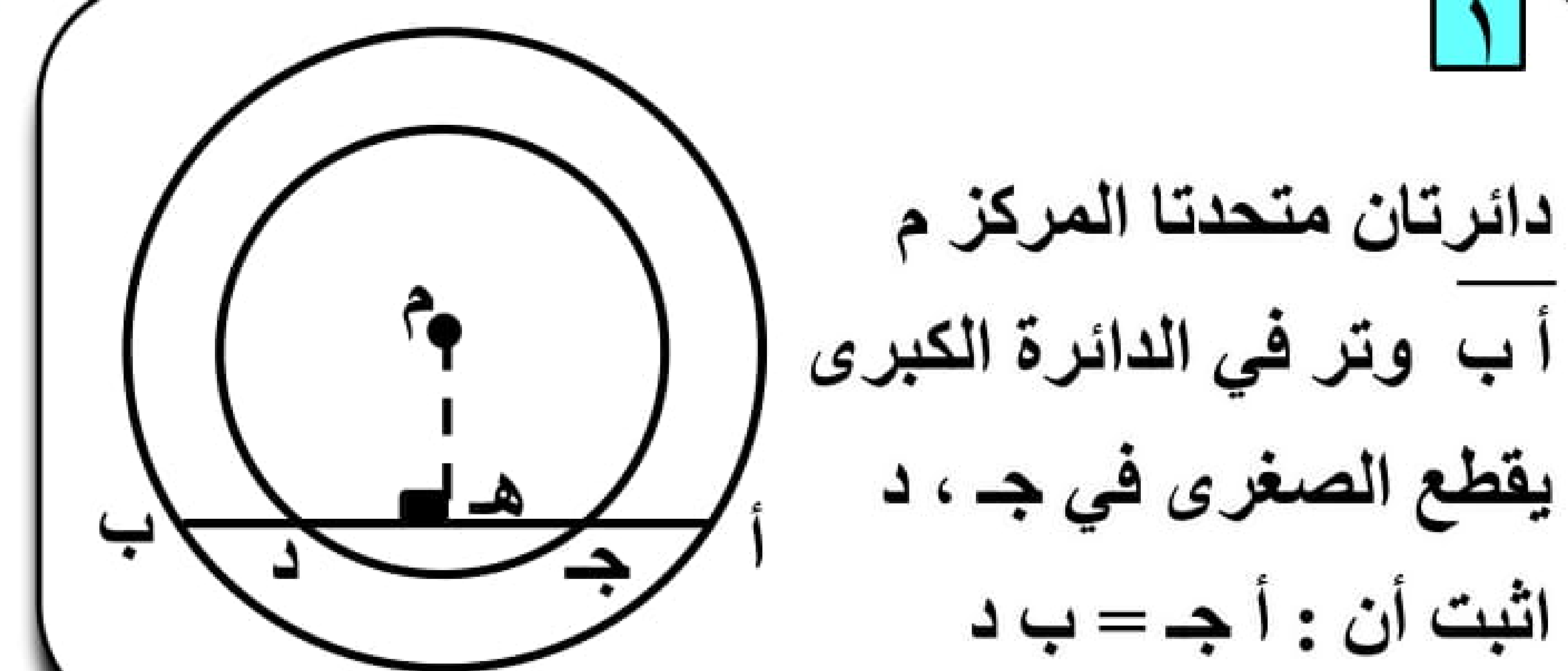
∴ ق(أ س ص) = ٧٠° ، ق(أ ص س) = ٥٠° بالتناظر

∴ ق (م س ص) = ٩٠ − ٧٠ = ٢٠°

، ق (م ص س) = ٩٠ − ٥٠ = ٤٠°

في Δ س م ص :

ق (س م ص) = ١٨٠ − (٢٠ + ٤٠) = ١٢٠°



١

دائرتان متحدتا المركز م

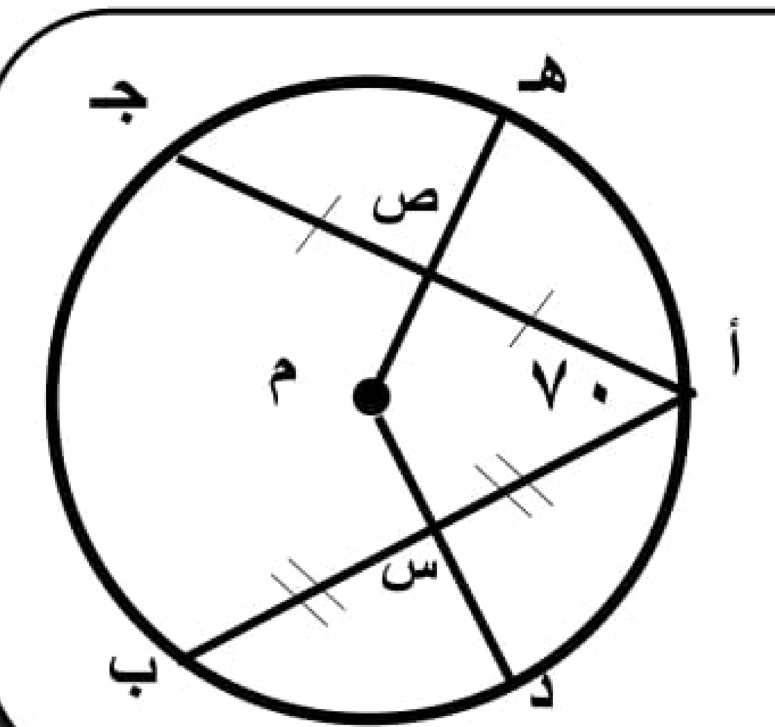
$\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة الكبرى

يقطع الصغرى في جـ ، د

اثبت أن : أ جـ = ب د

الحل

العمل : نرسم م هـ عمودى على $\overline{\text{أ ب}}$



٢

أ ب ، أجـ وتران

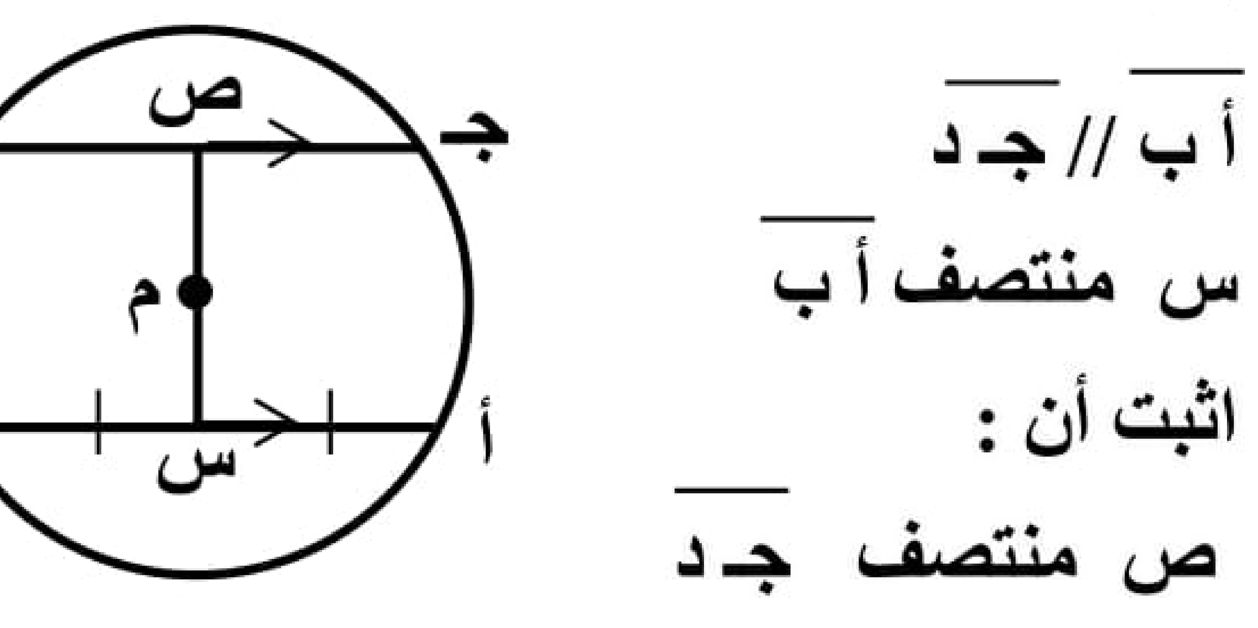
س منتصف أ ب ،

ص منتصف أ جـ

ق (جـ أ ب) = ٧٠°

أوجد ق (د م هـ)

الحل



٣

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$

س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

اثبت أن :

ص منتصف $\overline{\text{جـ د}}$

الحل



٤

أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة

$\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

اثبت أن: ١) $\overline{\text{هـ د}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

٢) محيط Δ جـ د هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط Δ أ ب جـ

الحل



1 عدد محاور التماثل لأى دائرة هو ....

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) عدد لا نهائى

2 عدد محاور تماثل نصف الدائرة هو ....

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) عدد لا نهائى

3 محور تماثل الدائرة هو ....

أ) نصف القطر ب) القطر جـ) الوتر د) المستقيم المار بالمركز

4 أكبر أوتار الدائرة طولا يسمى ....

أ) وتر ب) قطر جـ) نصف قطر د) مماس

5 دائرة طول أكبر وتر فيها = ١٢ سم فإن محيط الدائرة = ... سم

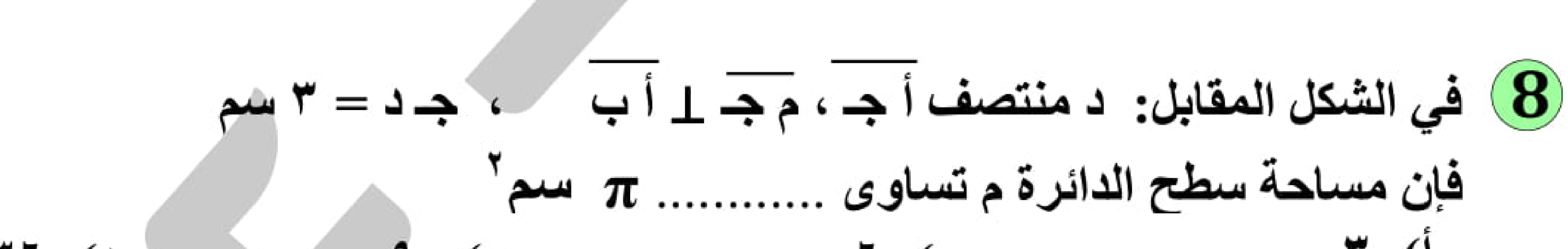
أ) ١٢ π ب) ٦π جـ) ٢٤π د) ١٠π

6 القطر هو .... يمر بمركز الدائرة

أ) وتر ب) مستقيم جـ) شعاع د) مماس

7 في الشكل المقابل: أ ب = ٨ سم ، م ب = ٥ سم فإن م د = ... سم

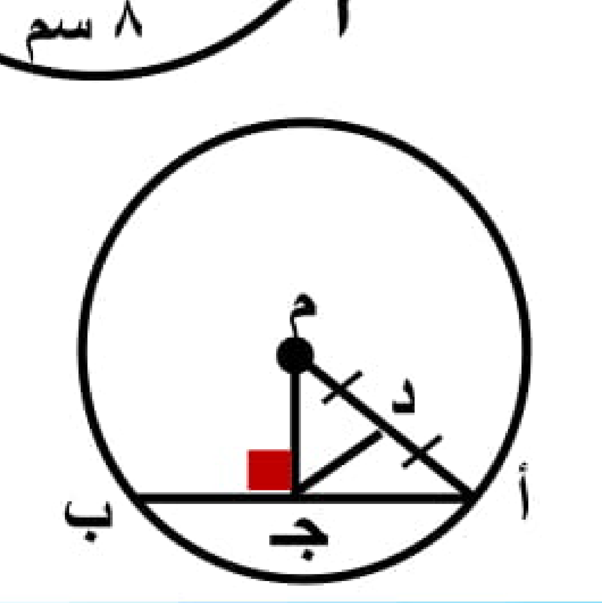
أ) ٥ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٢



8 في الشكل المقابل: د منتصف أ جـ ، م جـ ⊥ أ ب ، جـ د = ٣ سم

فإن مساحة سطح الدائرة م تساوى .... π سم²

أ) ٣ ب) ٦ جـ) ٩ د) ٣٦



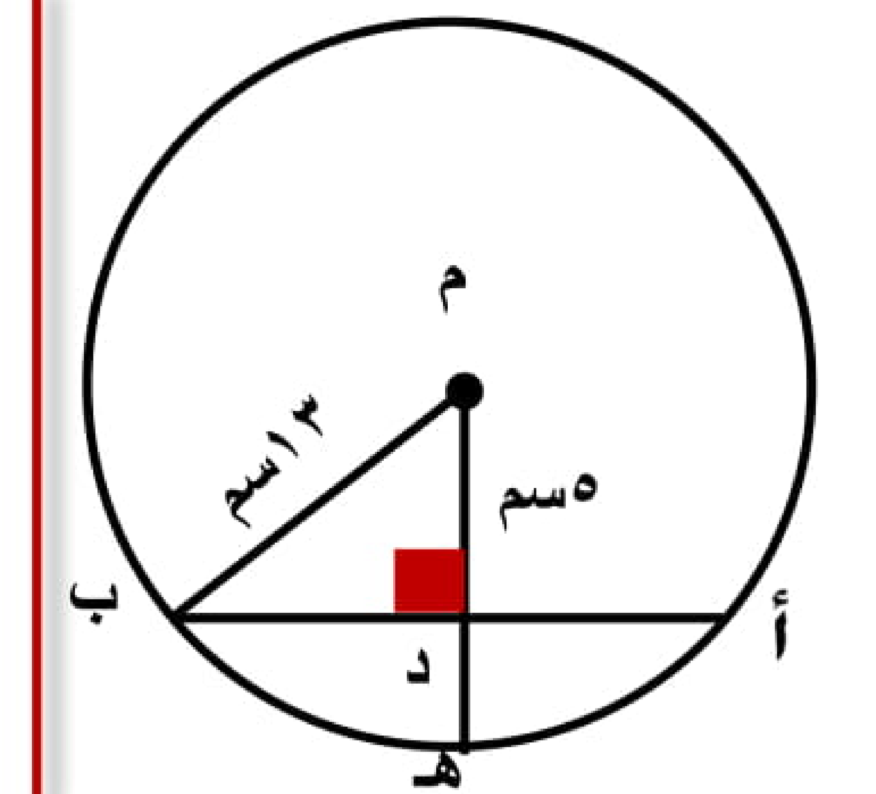


---

١) في الشكل المقابل:

أ ب = ... سم

هـ د = ... سم

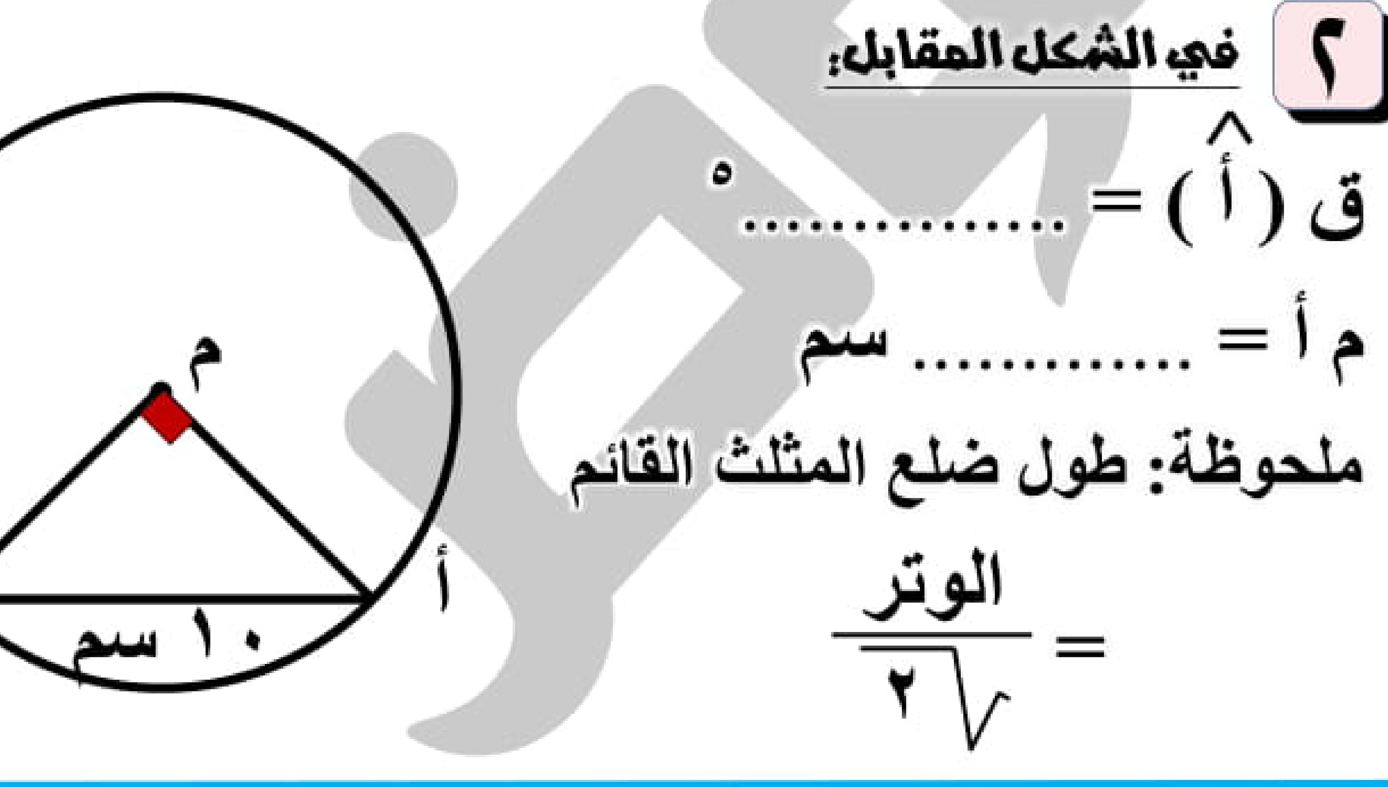


٢) في الشكل المقابل:

ق (أ^) = ... °

م أ = ... سم

ملحوظة: طول ضلع المثلث القائم = الوتر / √٢



---

٣) في الشكل المقابل:

جـ د قطر في الدائرة م

م هـ ⊥ أ ب

ق (أ م^ هـ) = ٣٠°

أ ب = ١٠ سم

أوجد طول جـ د ، هـ د

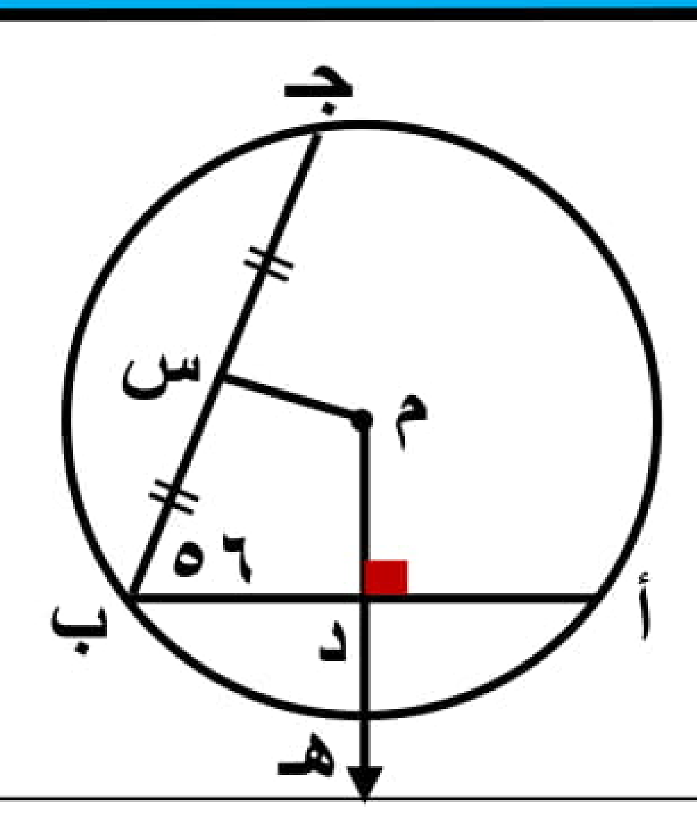
٤) في الشكل المقابل:

م دائرة طول نثف قطرها ٥ سم

س منتصف ب جـ ، أب = ٨ سم

م د ⊥ أ ب ، ق (ب^) = ٥٦

أوجد: ق (د م^ س) ، طول د هـ

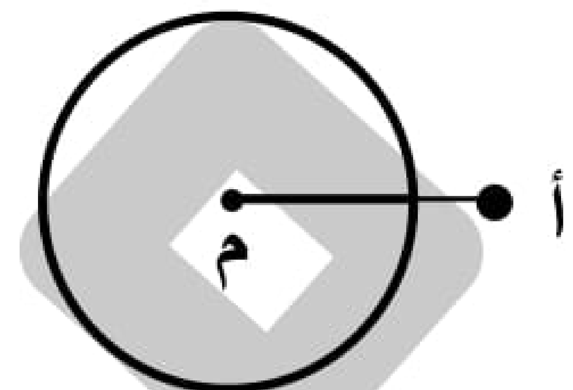


الدرس الثاني 2 — أوضاع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة

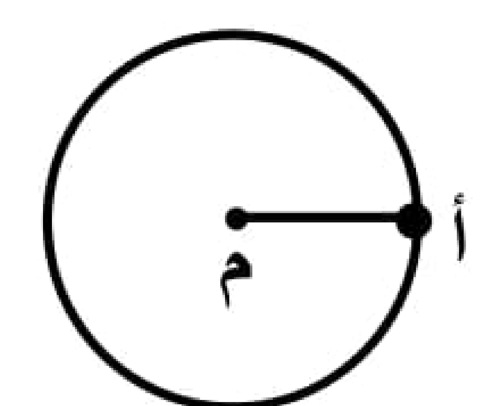
أولاً: أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فإن النقطة أ تقع :



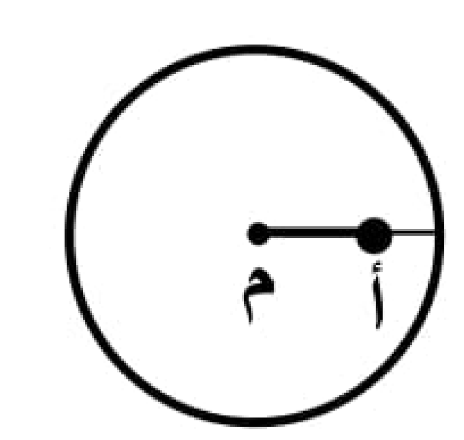


إذا كان : م أ > نق



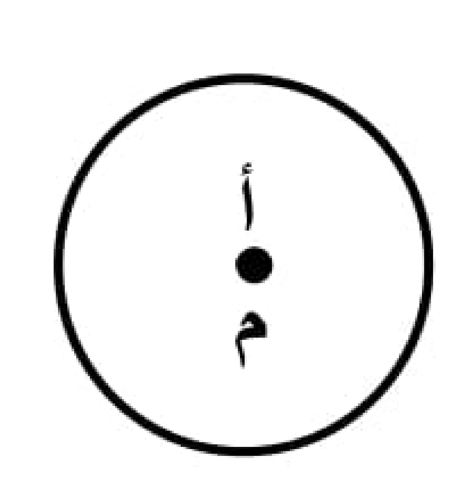
على للدائرة

إذا كان : م أ = نق



داخل الدائرة

إذا كان : م أ < نق



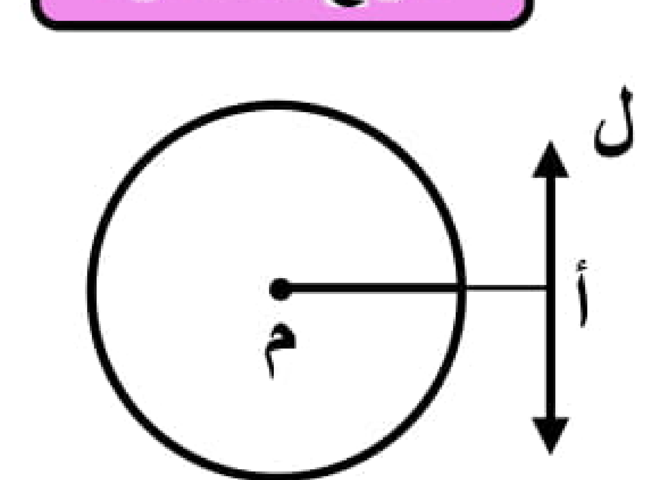
على المركز

إذا كان : م أ = صفر

ثانياً: أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة ∋ المستقيم فإن المستقيم يكون :

خارج الدائرة



إذا كان : م أ > نق

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ الدائرة م = Φ

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ سطح م = Φ

مماس للدائرة

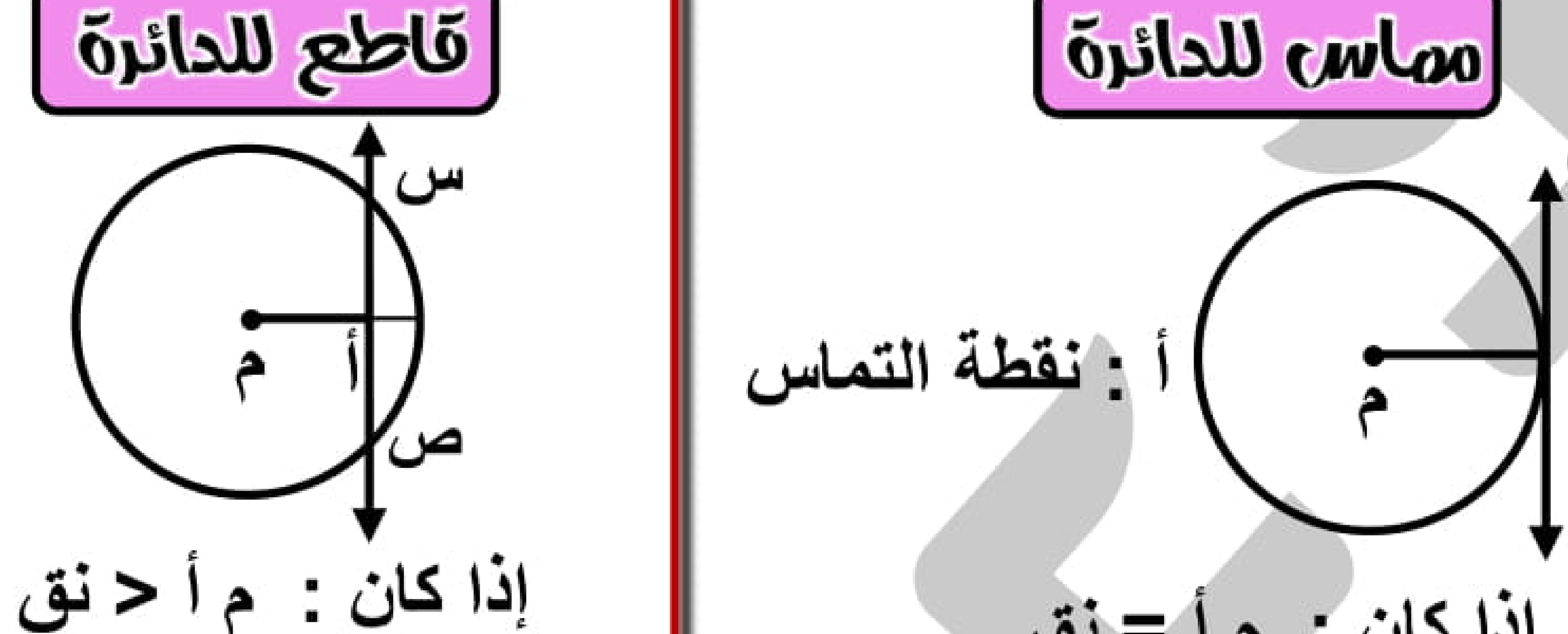


إذا كان : م أ = نق

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ الدائرة م = { أ }

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ سطح م = { أ }

قاطع للدائرة



إذا كان : م أ < نق

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ الدائرة م = { س ، ص }

$\overleftrightarrow{ل}$ ∩ سطح م = $\overline{س ص}$

تدريب

إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم ، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن المستقيم ل يكون ....

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة في المستوى بحيث م أ = ٤ سم فإن أ تقع .... الدائرة

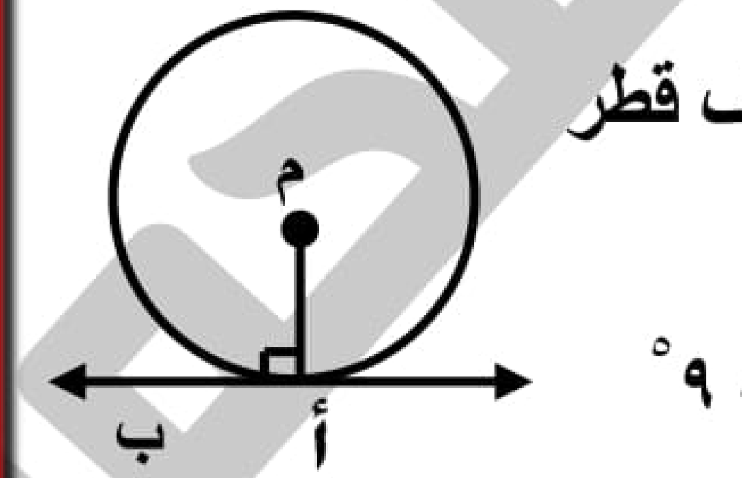
إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، والمستقيم ل مماس ، فإن المستقيم ل يبعد عن مركزها .... سم





حقائق على المماس

١ المماس عمودى على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس

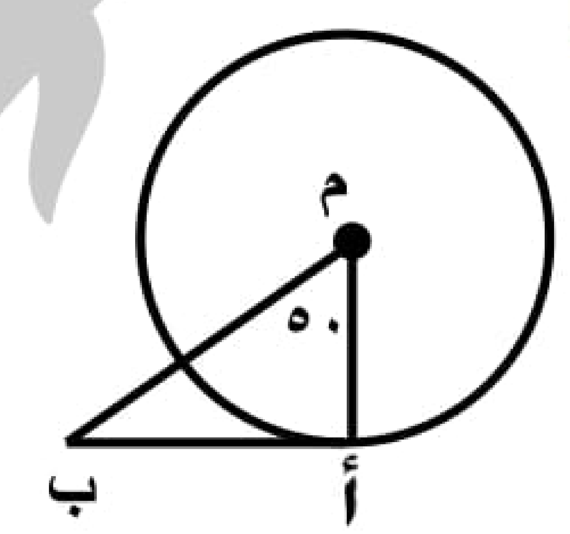


∵ أ ب مماس ، م أ نصف قطر

∴ م أ ⊥ أ ب

∴ ق (م أ ب) = ٩٠°

تدريب



في الشكل المقابل :

أ ب مماس للدائرة

أوجد ق (ب)

الحل

٢ لإثبات أن المستقيم مماس هنثبت انه عمودى على نق أى ان الزاوية اللى بينه وبين نصف القطر قياسها ٩٠

تدريب في الشكل المقابل

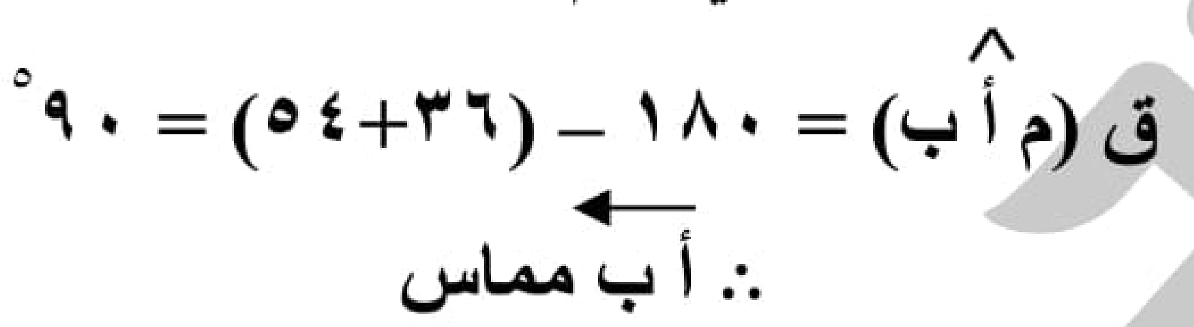
اثبت أن أ ب مماس

الحل

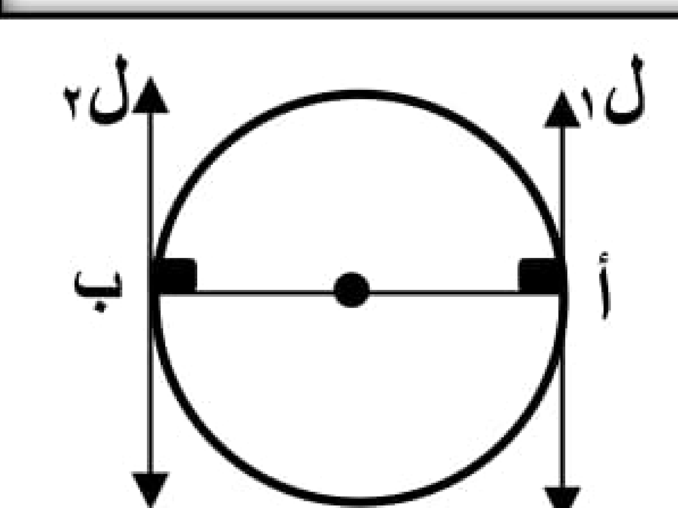
في Δ م أ ب :

ق (م أ ب) = ١٨٠ – (٣٦+٥٤) = ٩٠°

∴ أ ب مماس



٣ المماسان المرسومان من نهايتى قطر متوازيان

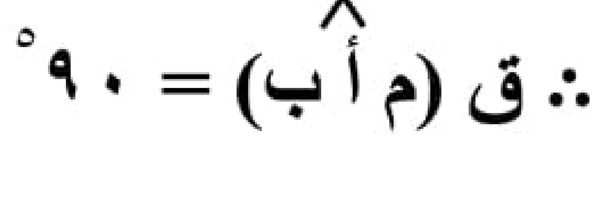


∵ أ ب قطر

، ل١ ، ل٢ مماسان

∴ ل١ // ل٢

ملحوظة : المماسان المرسومان من نهايتى وتر متقاطعان



مثال ١

أ د مماس للدائرة عند د

هـ منتصف ب جـ

ق (أ) = ٥٦°

أو جد ق (د م هـ)

الحل

∵ أ د مماس ، م د نصف قطر ∴ م د ⊥ أ د

∴ ق (م د أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف جـ ب ∴ م هـ ⊥ جـ ب

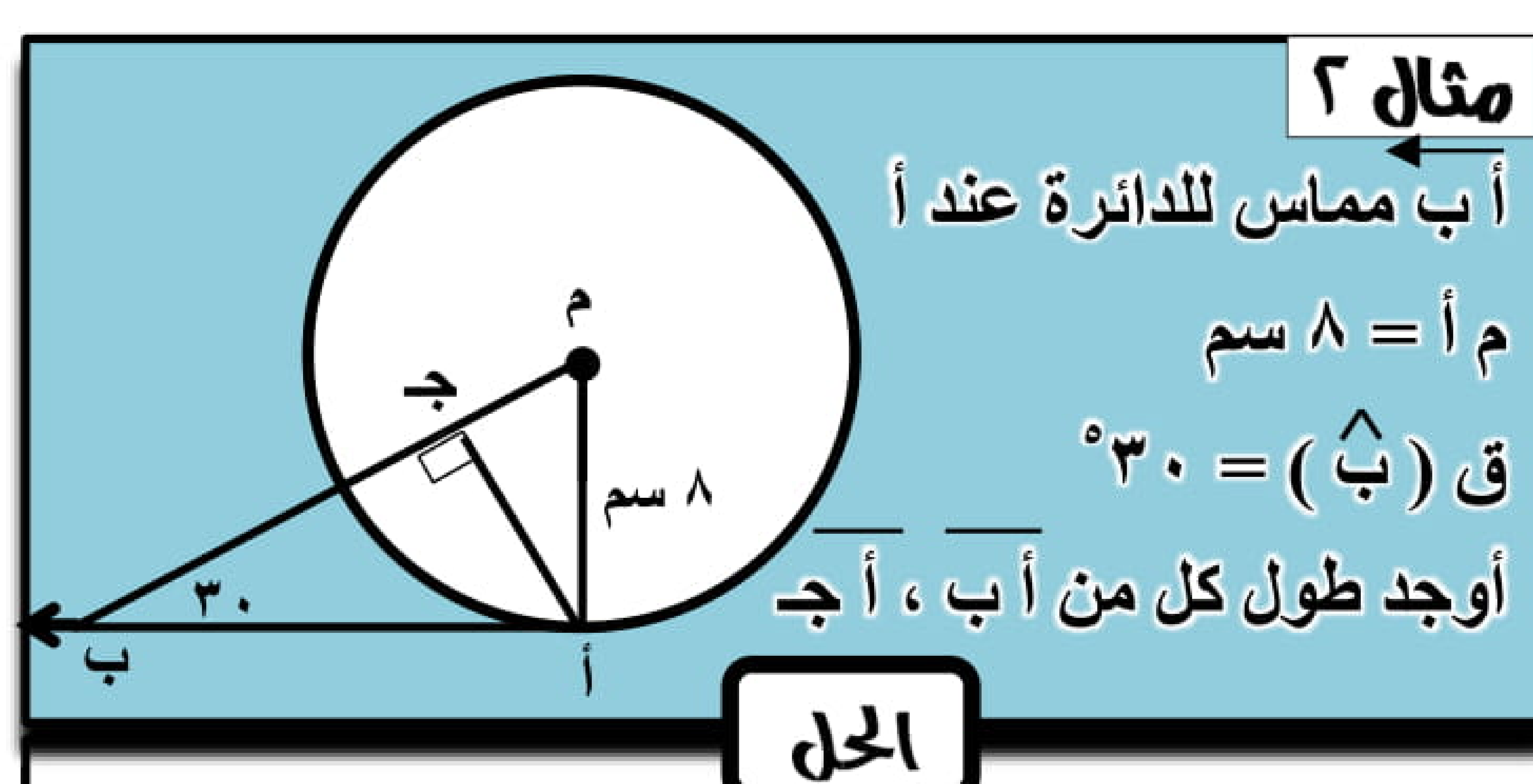
∴ ق (م هـ ب) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعى م هـ أ د = ٣٦٠°

∴ ق (د م هـ) = ٣٦٠ – (٥٦ + ٩٠ + ٩٠)

= ٣٦٠ – ٢٣٦ = ١٢٤°

مثال ٢



أ ب مماس للدائرة عند أ

م أ = ٨ سم

ق (ب) = ٣٠°

أوجد طول كل من أ ب ، أ جـ

الحل

∵ أ ب مماس ∴ م أ ⊥ أ ب ∴ Δ م أ ب قائم

∵ ق(م ب أ) = ٣٠° ∴ م ب = ٢ × ٨ = ١٦ سم

من فيثاغورث : في Δ م أ ب

(أ ب)² = ٢٥٦ – ٦٤ = ١٩٢ ∴ أ ب = $\sqrt{192}$ = ٨ $\sqrt{3}$

فى Δ أ ب جـ : ∵ أ جـ هو الضلع المقابل للزاوية ٣٠°

∴ أ جـ = $\frac{1}{2}$ الوتر أ ب ∴ أ جـ = $\frac{1}{2}$ × ٨ $\sqrt{3}$ = ٤ $\sqrt{3}$

ملحوظة: يمكن حساب أ جـ باستخدام نظرية اقليدس

إعداد أ/ محمود عوض

٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩

اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

1) إذا كانت أ نقطة تقع على الدائرة م التي قطرها ٦ سم فإن أ م = ... سم (٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

2) المماس لدائرة طول نصف قطرها ٥ سم يكون على بعد .... سم من مركزها (صفر ، ٣ ، ٥ ، ١٠)

3) وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٨

4) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = Φ فإن المستقيم ل يكون ....

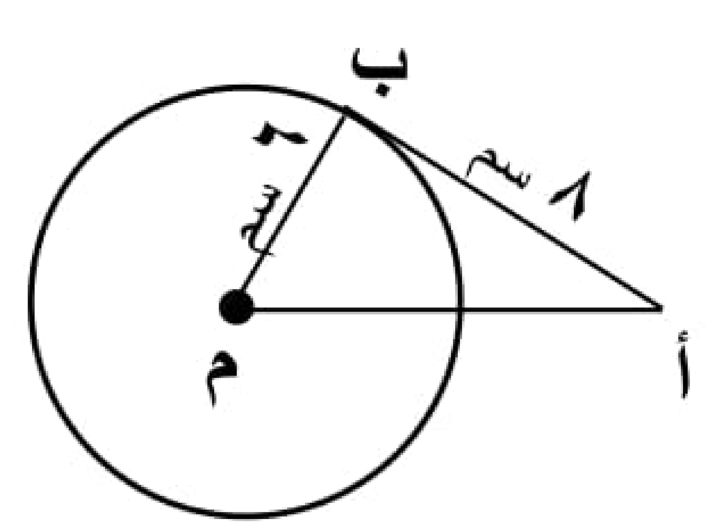
أ) محور تماثل ب) خارج الدائرة جـ) قاطع للدائرة د) مماس للدائرة

5) دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم ل يكون ....

أ) مماس للدائرة ب) خارج الدائرة جـ) قاطع للدائرة د) قطر

6) **في الشكل المقابل** : $\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م

م ب = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم فإن أ م = ... سم



أ) ٥ ب) ١٠ جـ) ١٢ د) ١٣



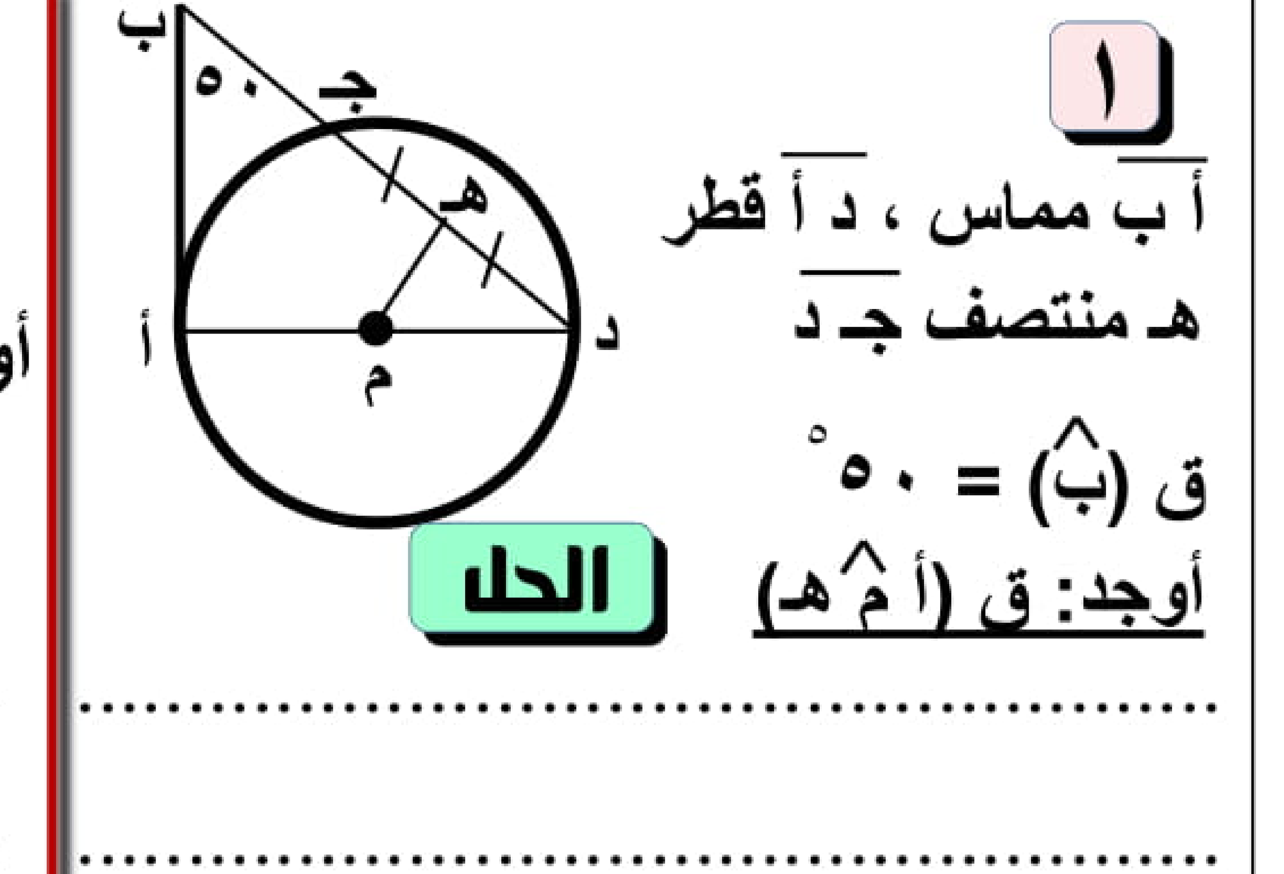
---

١) $\overline{أ ب}$ مماس ، $\overline{د أ}$ قطر

هـ منتصف جـ د

ق ($\hat{ب}$) = ٥٠°

أوجد: ق (أ $\hat{م}$ هـ)



الحل

....

....

....

....

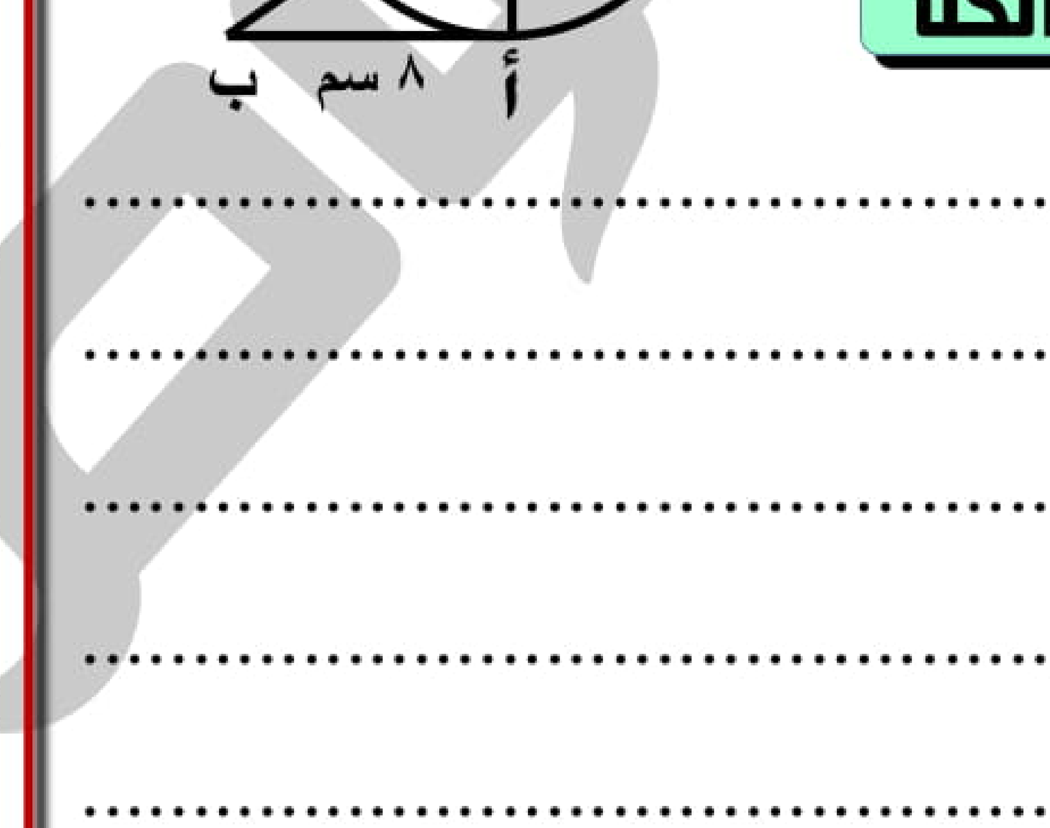
....

....

....

٢) $\overline{أ ب}$ مماس

أوجد طول $\overline{د ب}$



الحل

....

....

....

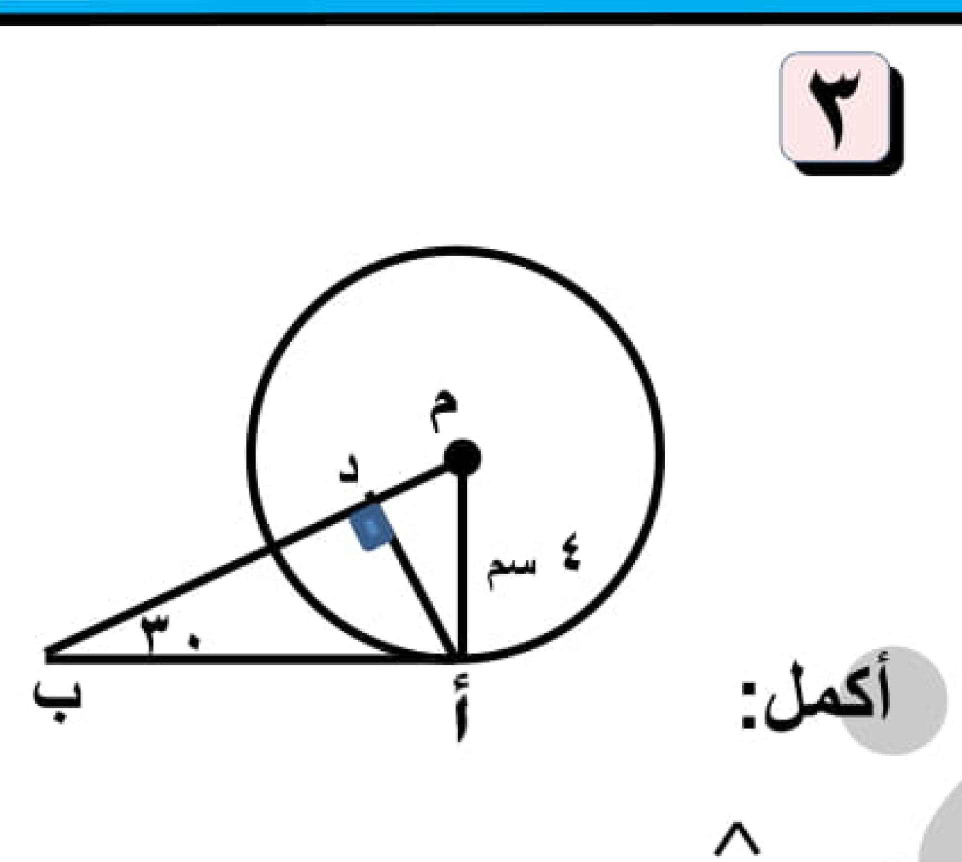
....

....

....

....

٣)



أكمل:

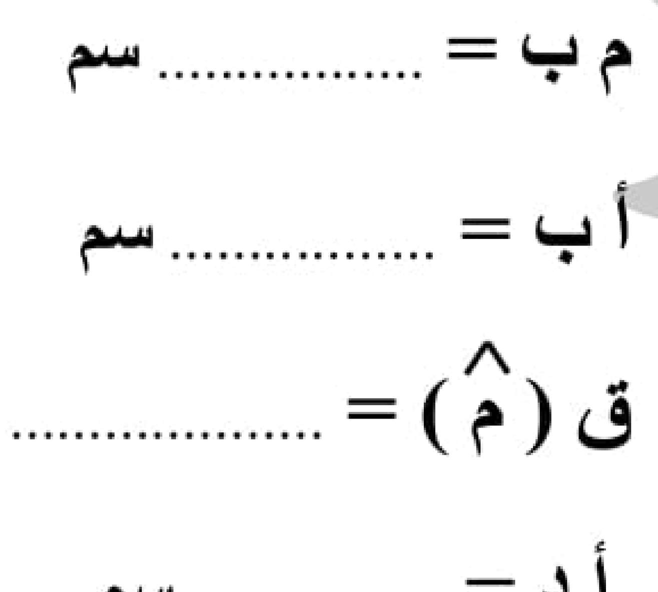
ق (م $\hat{أ}$ ب) = ...

م ب = ... سم

أ ب = ... سم

ق ($\hat{م}$) = ...

أ د = ... سم



---

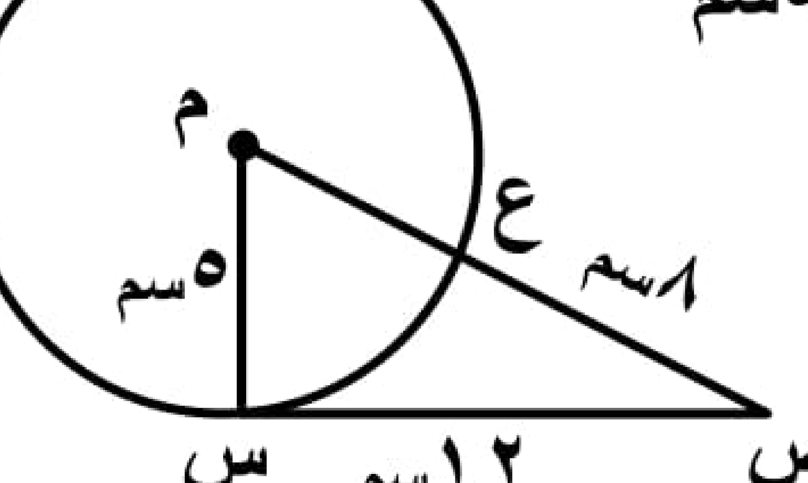
٤) **في الشكل المقابل:**

م دائرة طول نصف قطرها ٥سم

ص ع = ٨سم ،

ص س = ١٢سم

اثبت أن $\overline{س ص}$ مماس



الحل

....

....

....

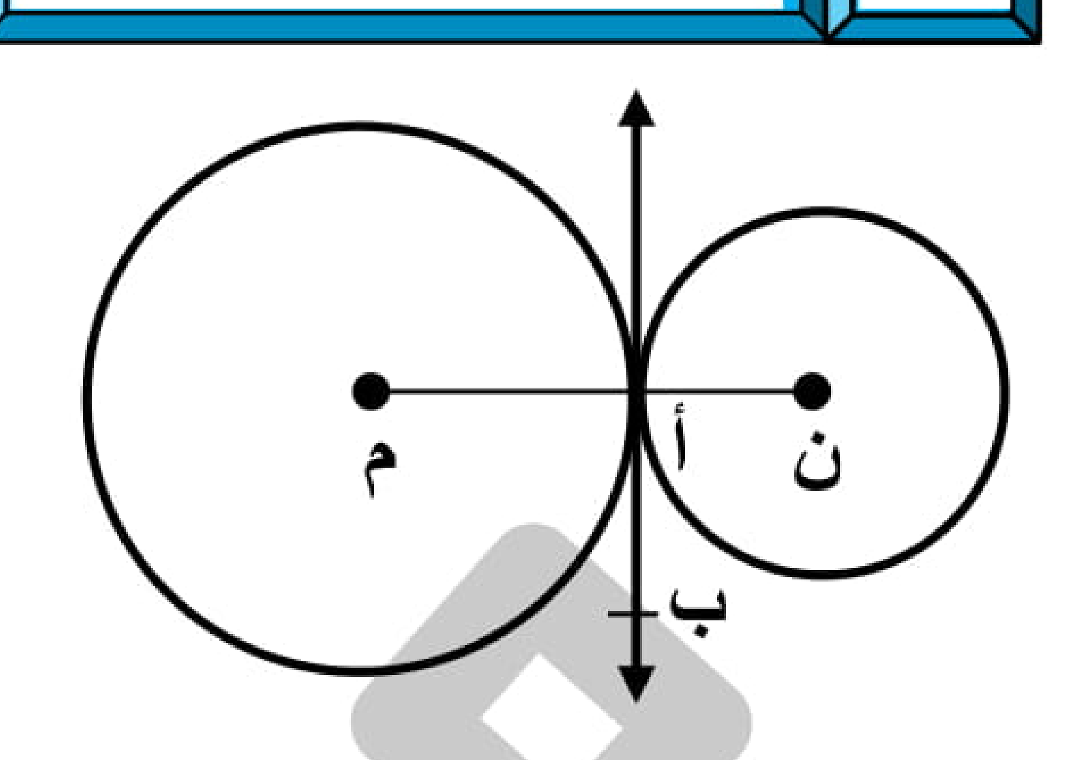
....

....

أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة

إذا كانت م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ ، م ن خط المركزين فإن الدائرتان تكونان :

١ متماستان من الخارج

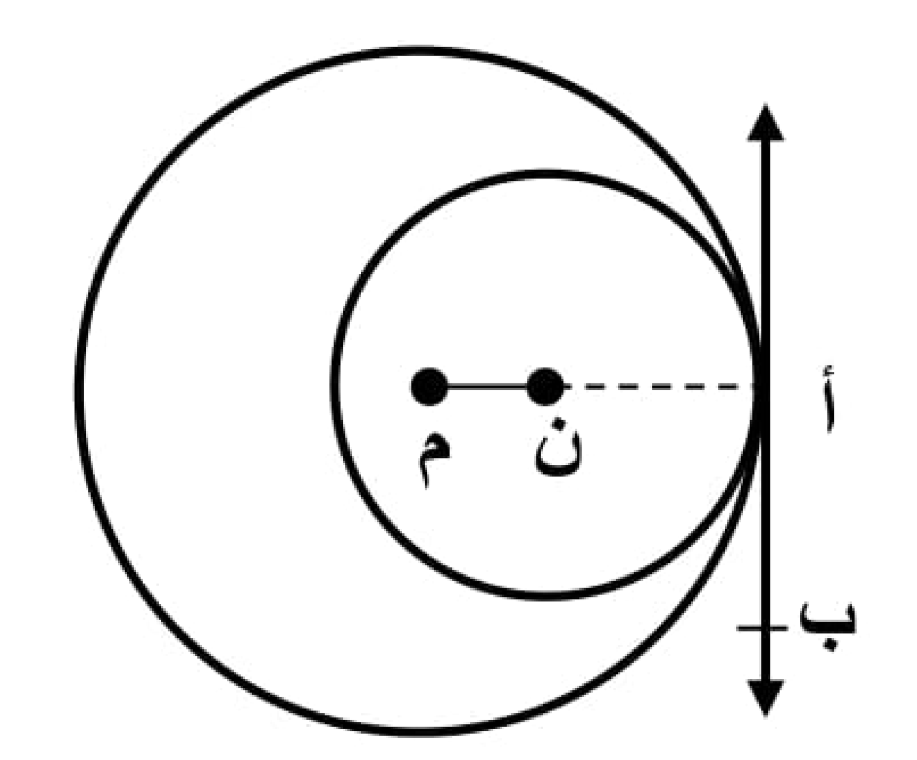


* إذا كان : م ن = نق١ + نق٢

م ن = المجموع

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }
* سطح م ∩ سطح ن = { أ }
* أ ب يسمى مماس مشترك

٢ متماستان من الداخل

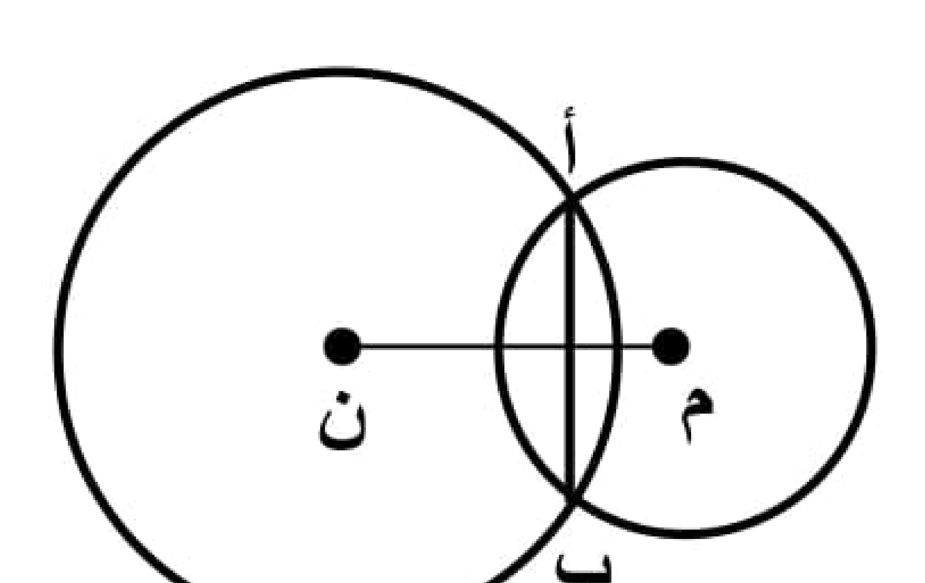


* إذا كان : م ن = نق١ - نق٢

م ن = الطرح

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }
* سطح م ∩ سطح ن = سطح ن
* أ ب يسمى مماس مشترك

٣ متقاطعتان

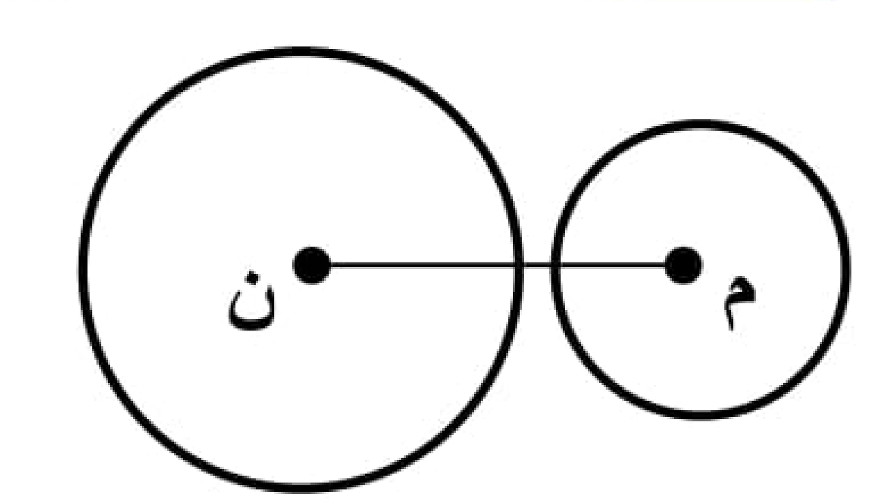


* نق١ - نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

الطرح < م ن < المجموع

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}
* أ ب يسمى وتر مشترك

٤ متباعدتان



* إذا كان : م ن > نق١ + نق٢

م ن > المجموع

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ
* سطح م ∩ سطح ن = Φ

٥ متداخلتان



* م ن < نق١ - نق٢

م ن < الطرح

* الدائرة م ∩ الدائرة ن = Φ
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م

٦ متحدتا المركز

* إذا كان : م ن = صفر
* الدائرة م ∩ الدائرة ن =
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م

ملحوظة : عشان تحدد وضع الدائرتان اجمع نق١ + نق٢ واطرح نق١ - نق٢ وقارنهم بخط المركزين

تدريب

م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٩ سم ، ٥ سم حدد موضع الدائرتان عندما :

١- م ن = ١٤ سم
الدائرتان ....

٢- م ن = ٤ سم
الدائرتان ....

٣- م ن = ٣ سم
الدائرتان ....

٤- م ن = ١٦ سم
الدائرتان ....

٥- م ن = صفر
الدائرتان ....

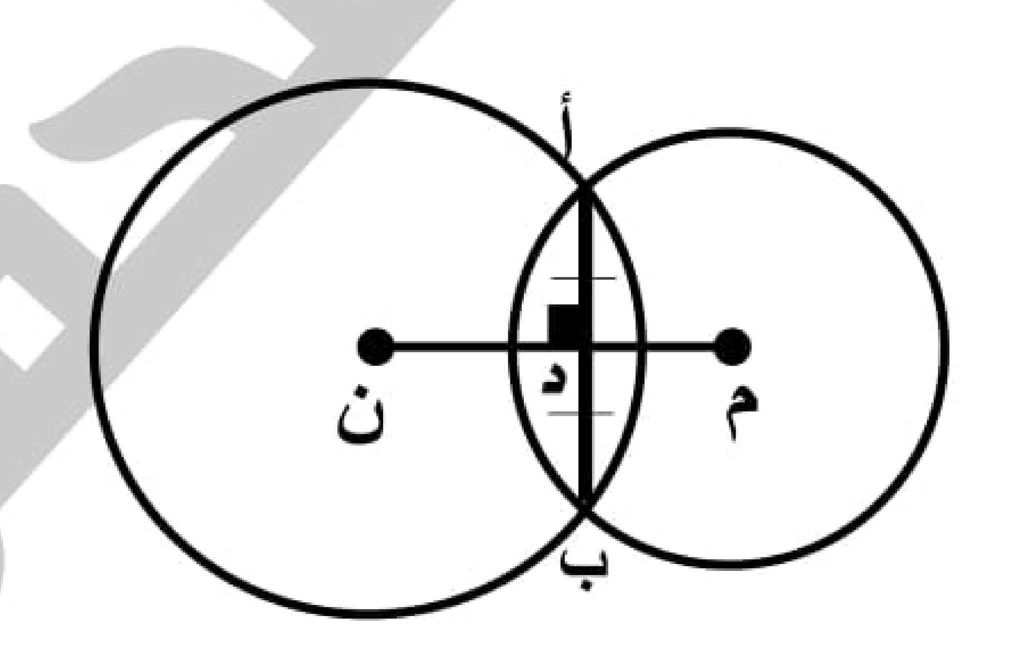
٦- م ن = ٧ سم
الدائرتان ....

نتائج هامة على خط المركزين



١ في الدائرتان المتقاطعتان

خط المركزين عمودى على الوتر المشترك وينصفه



∵ $\overline{أب}$ وتر مشترك ، $\overline{من}$ خط المركزين

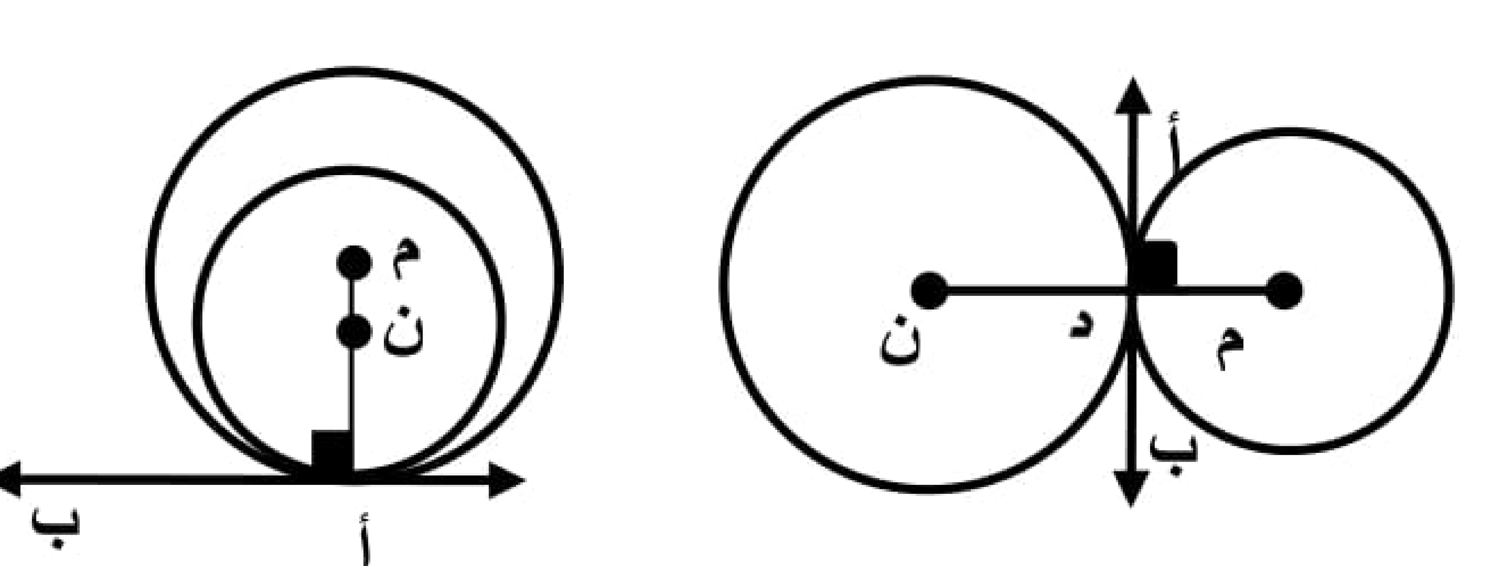
∴ $\overline{من} \perp \overline{أب}$ ∴ ق ($\hat{مدأ}$) = ٩٠°

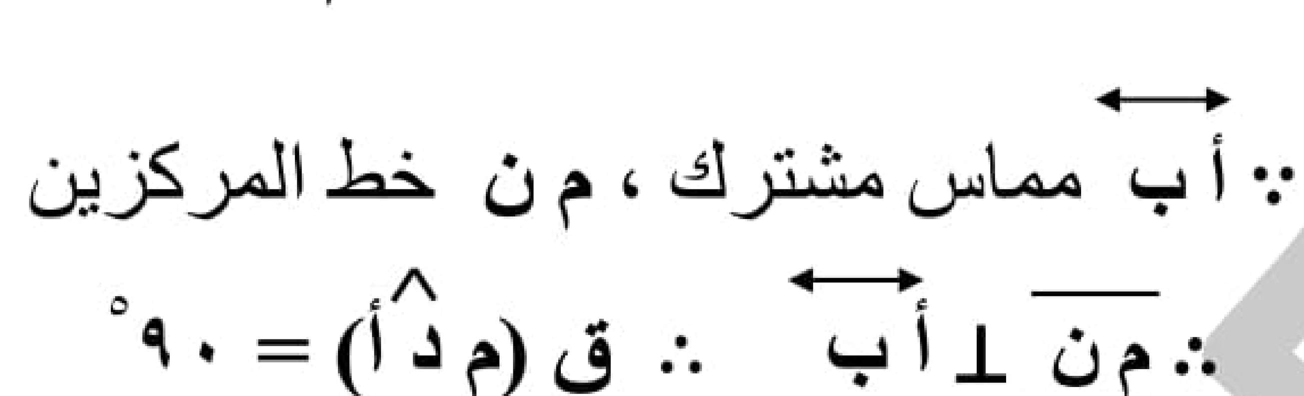
، $\overline{من}$ ينصف $\overline{أب}$ ∴ أد = دب



٢ في الدائرتان المتماستان

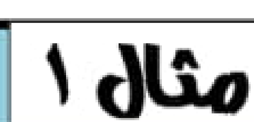
خط المركزين عمودى على المماس المشترك





∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك ، من خط المركزين

∴ $\overline{من} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ∴ ق ($\hat{مدأ}$) = ٩٠°



مثال ١

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

ق ($\hat{من د}$) = ١٢٥°

ق ($\hat{ب جـ د}$) = ٥٥°

اثبت أن $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماس

الحل

∵ $\overline{أب}$ وتر مشترك ، $\overline{من}$ خط المركزين

∴ $\overline{أب} \perp \overline{من}$ ∴ ق ($\hat{أهـن}$) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق ($\hat{د}$) = ٣٦٠ − (١٢٥ + ٥٥ + ٩٠) = ٩٠°

∴ $\overline{ن د} \perp \overline{جـ د}$

∴ $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماس

(وهو المطلوب اثباته)

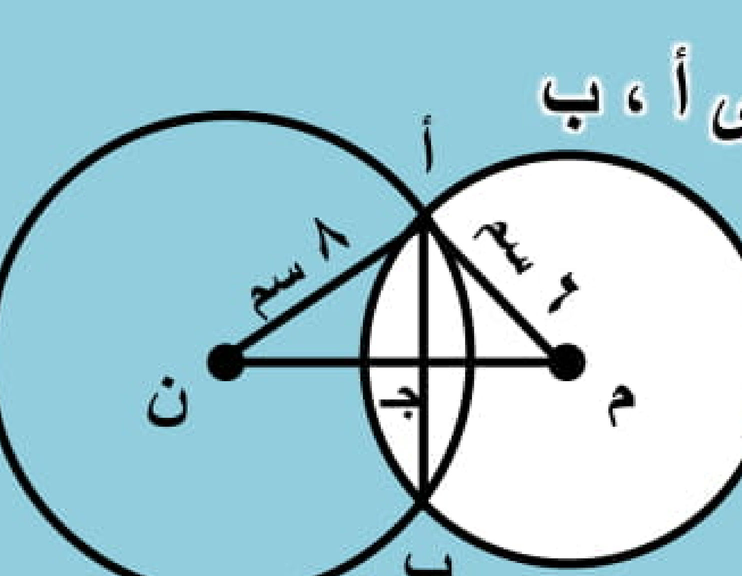
مثال ٢

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

م أ = ٦سم ، ن أ = ٨سم

$\overline{م أ} \perp \overline{ن أ}$

أوجد طول $\overline{أب}$



الحل

في Δ أ م ن (من فيثاغورث) :

∵ $\overline{م أ} \perp \overline{م ن}$ ∴ (م ن)^2 = ٦^2 + ٨^2 = ١٠٠

∴ م ن = ١٠ سم

∵ أب وتر مشترك ∴ م ن ⊥ أب

من إقليدس : أ جـ = $\frac{أم \times أن}{من}$ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

∵ $\overline{أب}$ وتر مشترك ∴ م ن ينصف $\overline{أب}$

∴ أب = ٢ × ٤,٨ = ٩,٦ سم

مثال ٣

م ، ن دائرتان متماستان
ب جـ مماس مشترك
م ب = ٥ سم ،
ن جـ = ٨ سم
أوجد طول ب جـ

الحل

العمل : نرسم م د ⊥ ن جـ

∵ ب جـ مماس مشترك ∴ م ب ⊥ ب جـ ، ن جـ ⊥ ب جـ

∴ الشكل م ب جـ د مستطيل

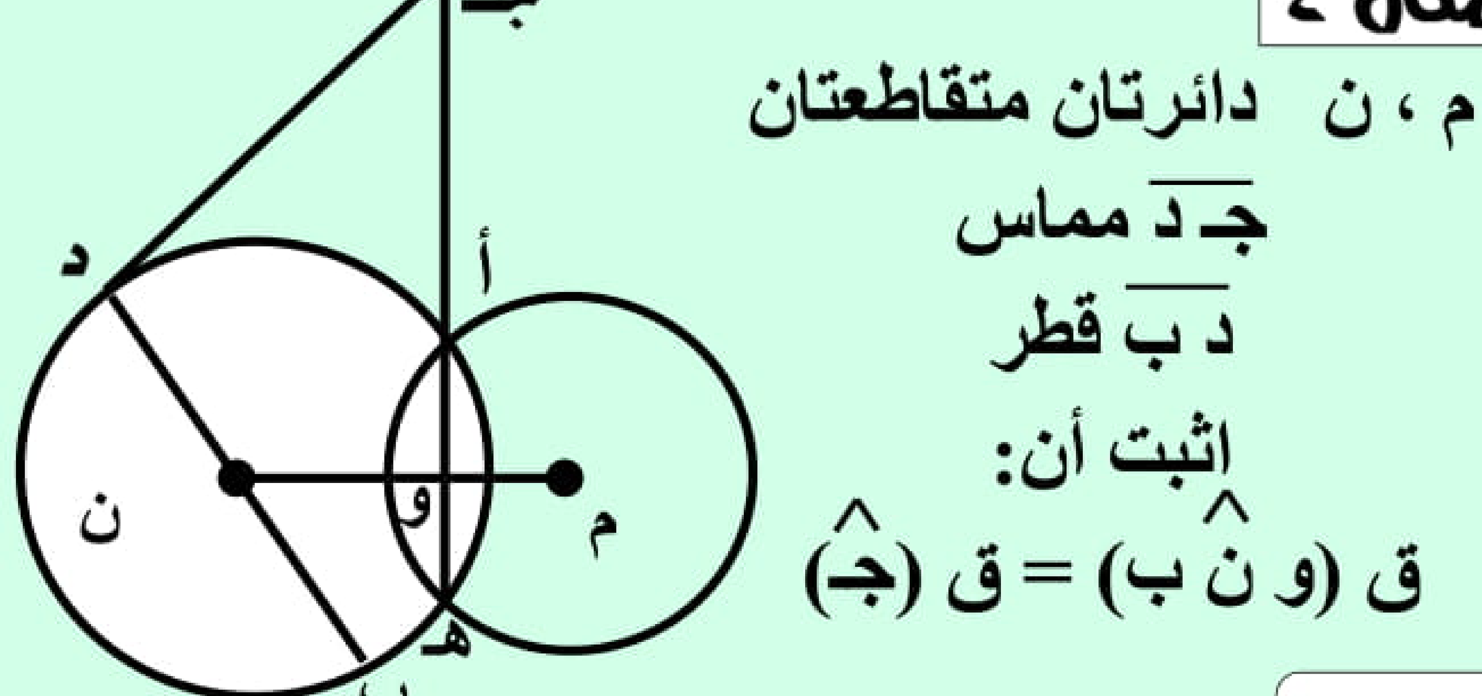
∴ د جـ = م ب = ٥سم ∴ ن د = ٨ – ٥ = ٣ سم

م ن = ٥ + ٨ = ١٣سم ومن فيثاغورث في Δ م د ن:

$(م د)^{٢}$ = ١٦٩ – ٩ = ١٦٠

م د = ٤ $\sqrt{١٠}$ ، ب جـ = ٤ $\sqrt{١٠}$

مثال ٤



م ، ن دائرتان متقاطعتان
جـ د مماس
د ب قطر
اثبت أن:
ق (و نَ ب) = ق (جَ)

الحل

∵ أ ب وتر مشترك ∴ م ن ⊥ أ هـ

∴ ق (أ وَ ن) = ٩٠

∵ جـ د مماس ∴ جـ د ⊥ د ن ∴ ق (دَ) = ٩٠

في الشكل الرباعى جـ و ن د ينتج أن:

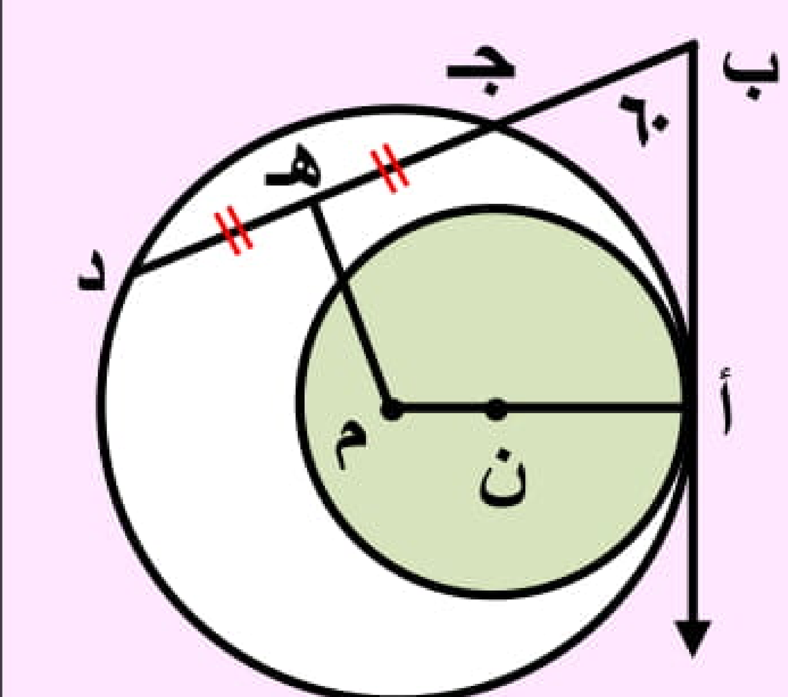
ق (و نَ د) + ق (جَ) = ١٨٠ ← ١

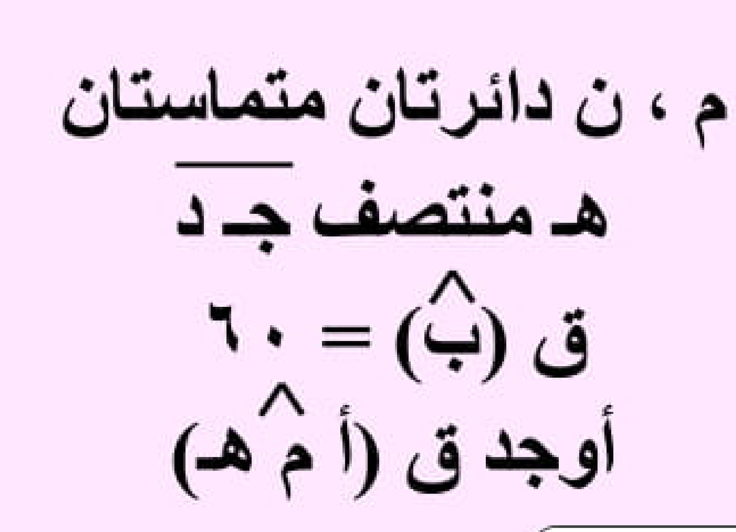
∵ ق (و نَ د) + ق (و نَ ب) = ١٨٠ ← ٢ زاوية مستقيمة

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (جَ) = ق (و نَ ب)

تدريبات

تدريب ١

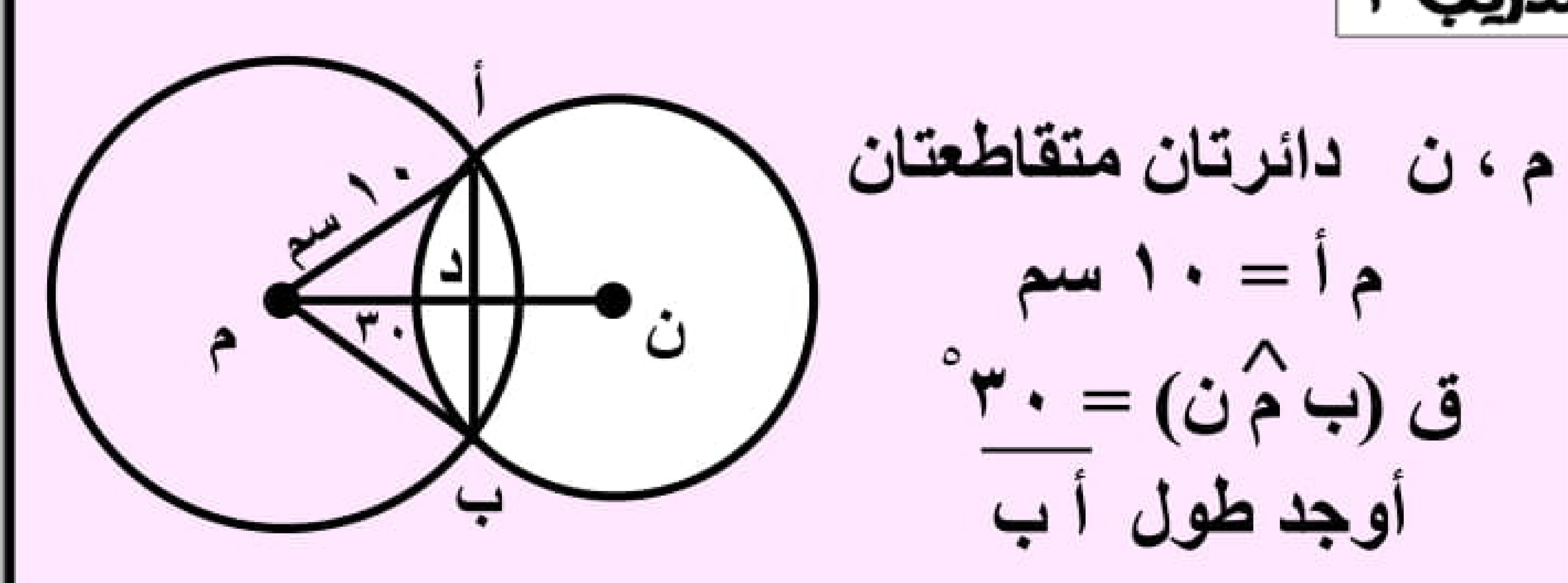




م ، ن دائرتان متماستان
هـ منتصف جـ د
ق (بَ) = ٦٠
أوجد ق (أ مَ هـ)

الحل

تدريب ٢



م ، ن دائرتان متقاطعتان
م أ = ١٠ سم
ق (ب مَ ن) = ٣٠°
أوجد طول أ ب



1 خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على .... وينصفه

أ) القطر ب) الوتر جـ) الوتر المشترك د) المماس

2 دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، أنصاف أقطارهم ٥ سم ، ٩ سم فإن م ن = ... سم

أ) ١٤ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٩

3 م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٢ سم فإن م ن ∋ ....

أ)] ٣ ، ٧ [ب)] ٣ ، ٧] جـ) [٣ ، ٧ [د) [٣ ، ٧]

4 إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = ... سم

أ) ٥ ب) ٦ جـ) ١١ د) ١٦

5 إذا كان الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥ سم ، م ن = ٩ سم
فإن طول نصف قطر الأخرى = ... سم

أ) ٤ ب) ٥ جـ) ٩ د) ١٤

6 م دائرة طول قطرها ٧ سم ، أ نقطة في مستوى الدائرة وكان م أ = ٤ سم فإن أ تقع ....

أ) داخل الدائرة ب) خارج الدائرة جـ) على الدائرة د) على مركز الدائرة

7 م ، ن دائرتان متباعدتان طولا نصفى قطريهما ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب فإن م ن .... ١٤ سم

أ) > ب) < جـ) = د) ≤

8 محور التماثل للوتر المشترك أ ب لدائرتين متقاطعتين م ، ن هو ....

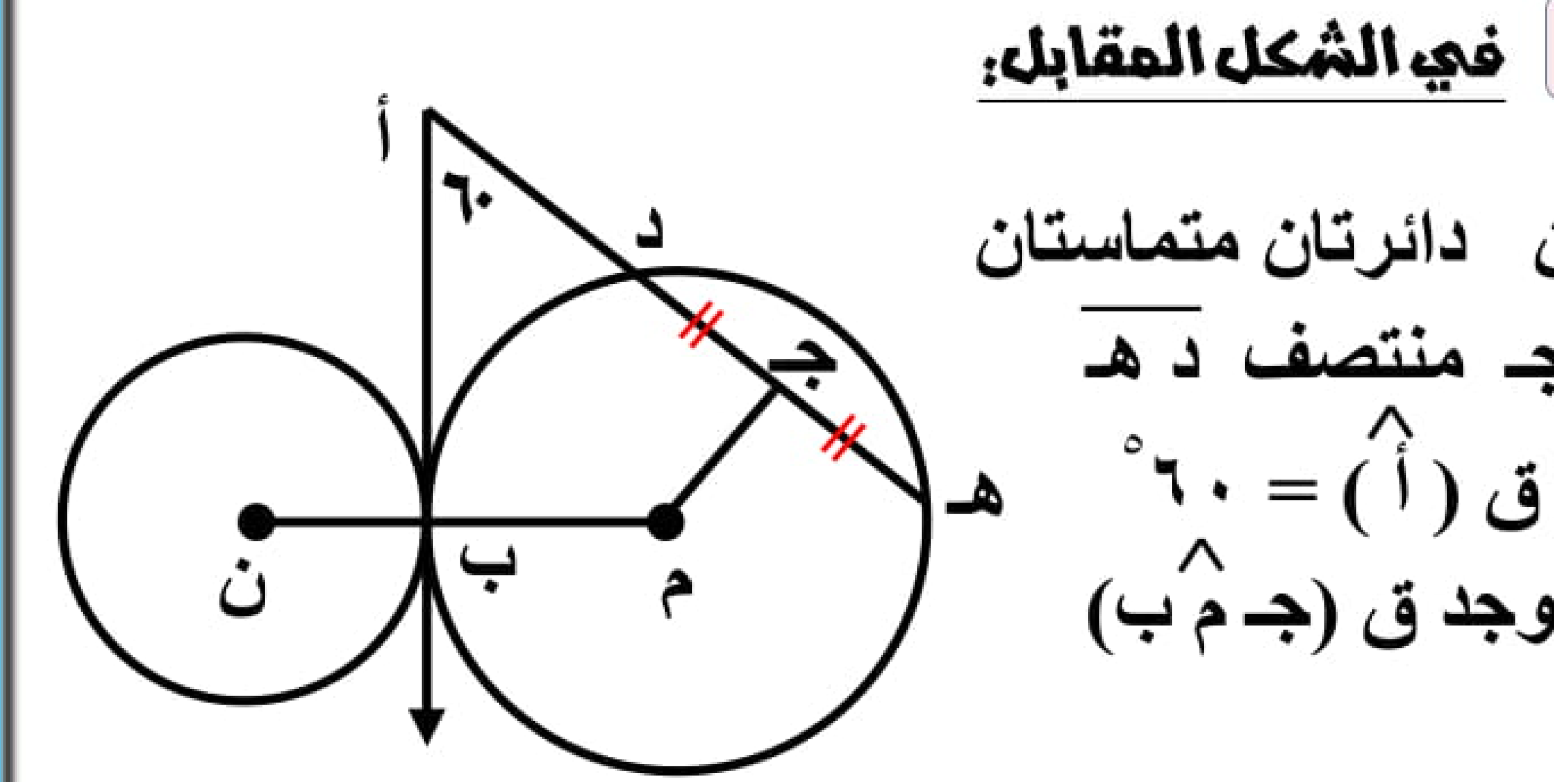
أ) $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ جـ) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ د) $\overleftrightarrow{\text{ن أ}}$

9 إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتان م ، ن تكونان ....

أ) متباعدتان ب) متحدتى المركز جـ) متقاطعتان د) متماستان من الخارج

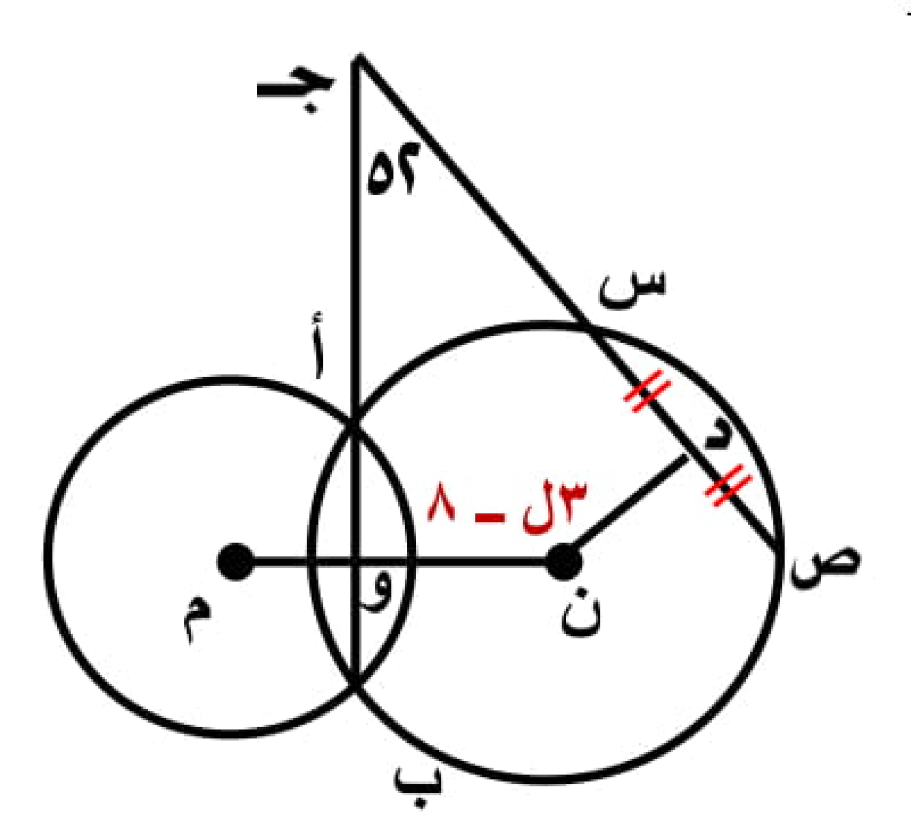
١) في الشكل المقابل:

م ، ن دائرتان متماستان
جـ منتصف $\overline{\text{د هـ}}$
ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٦٠°
أوجد ق ($\hat{\text{جـ م ب}}$)



٢) في الشكل المقابل:

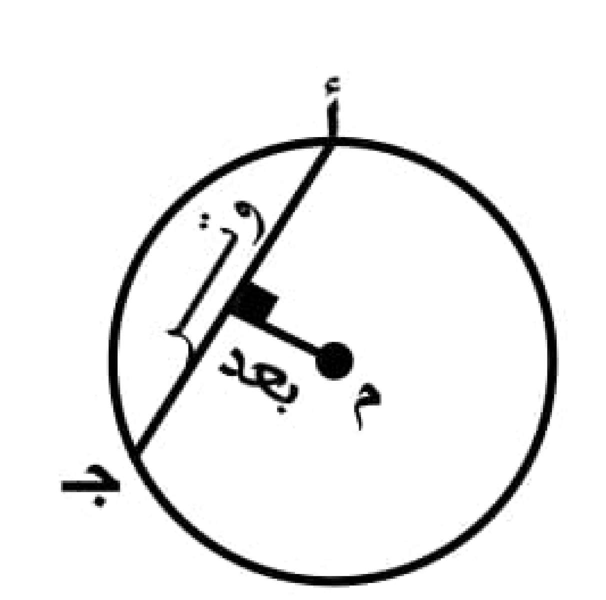
أوجد قيمة ل



الدرس الرابع 4 — علاقة أوتار الدائرة بمركزها

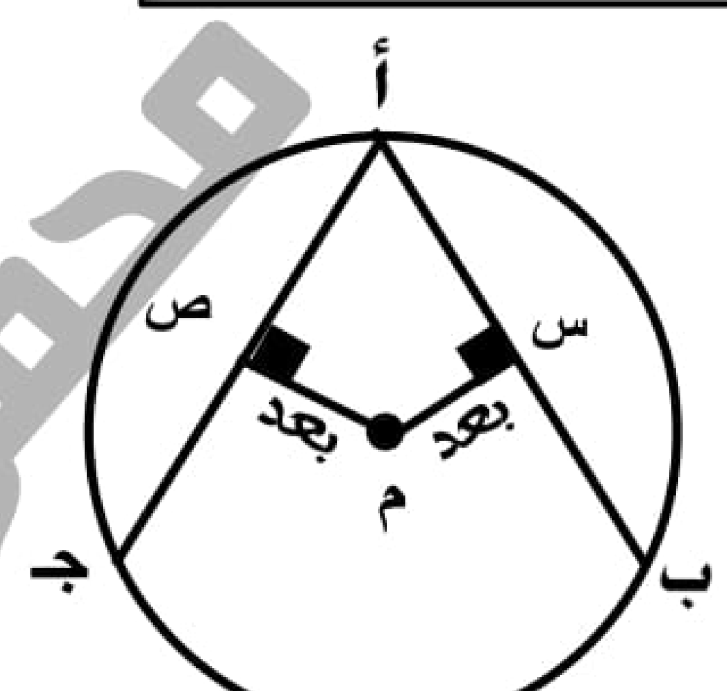
البعد لازم يكون عمودى

ولو قالك انه ينصف الوتر استنتج من التنصيف انه عمودى



في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأبعاد تكون متساوية

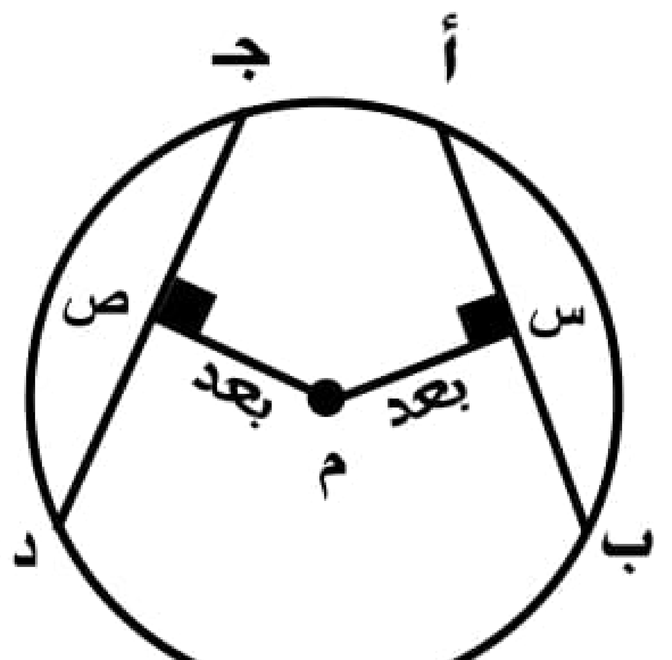


∵ أ ب = أ جـ (الأوتار متساوية)

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة

إذا كانت الأبعاد متساوية فإن الأوتار تكون متساوية

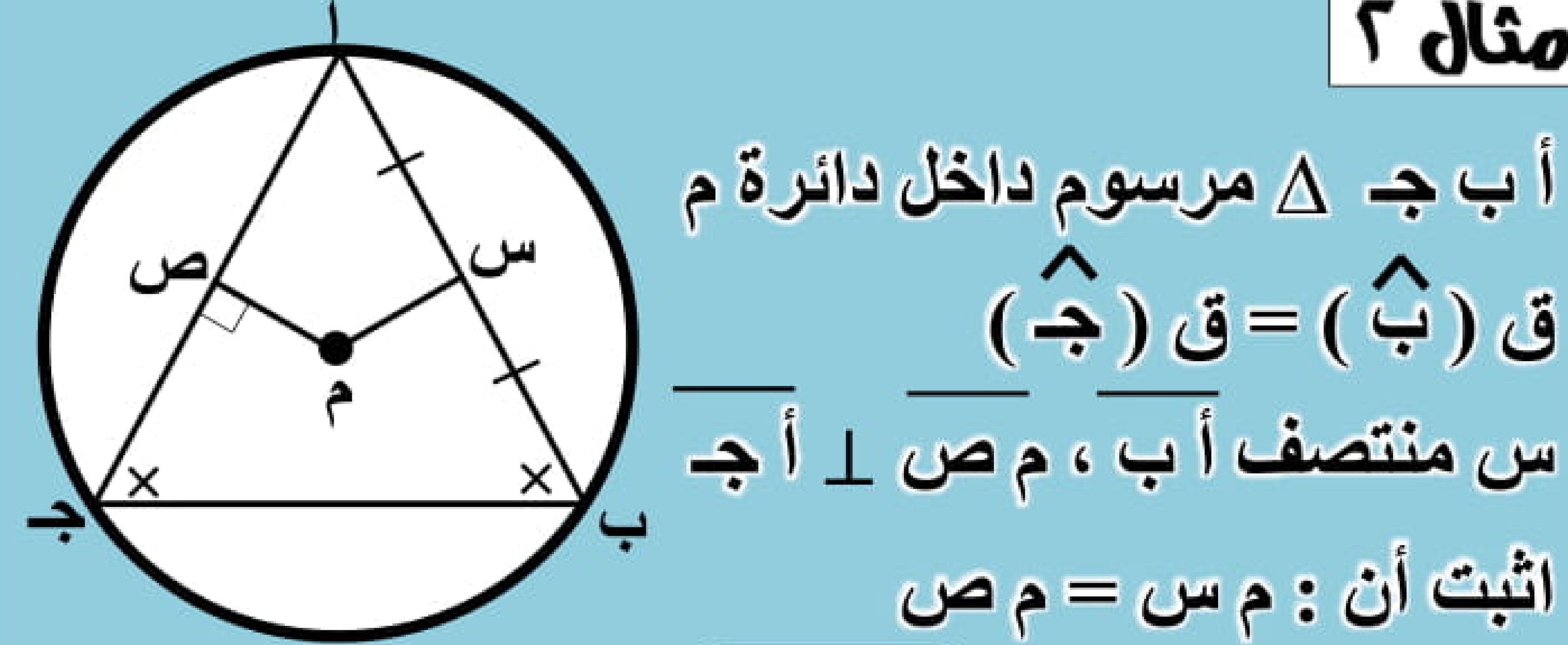


∵ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

∴ أ ب = جـ د (الأوتار متساوية)

لو أعطاك وترين متساويين : استنتج ان البعدين متساويين والعكس.

ولو طلب منك تثبت ان وترين متساويين : حاول تثبت ان البعدين متساويين والعكس.



مثال ١ — مسألة من النماذج

أ ب = أ جـ

$\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

اثبت أن : س د = ص هـ

الحل

∵ أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

، ∵ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

∴ م د = م هـ ⟵ (١) (الأبعاد متساوية)

، ∵ م س = م ص ⟵ (٢) (أنصاف أقطار)

بطرح ١ من ٢ ينتج أن :

س د = ص هـ

مثال ٢

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة م

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{أ جـ}$

اثبت أن : م س = م ص

الحل

∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

في △ أ ب جـ :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

∴ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

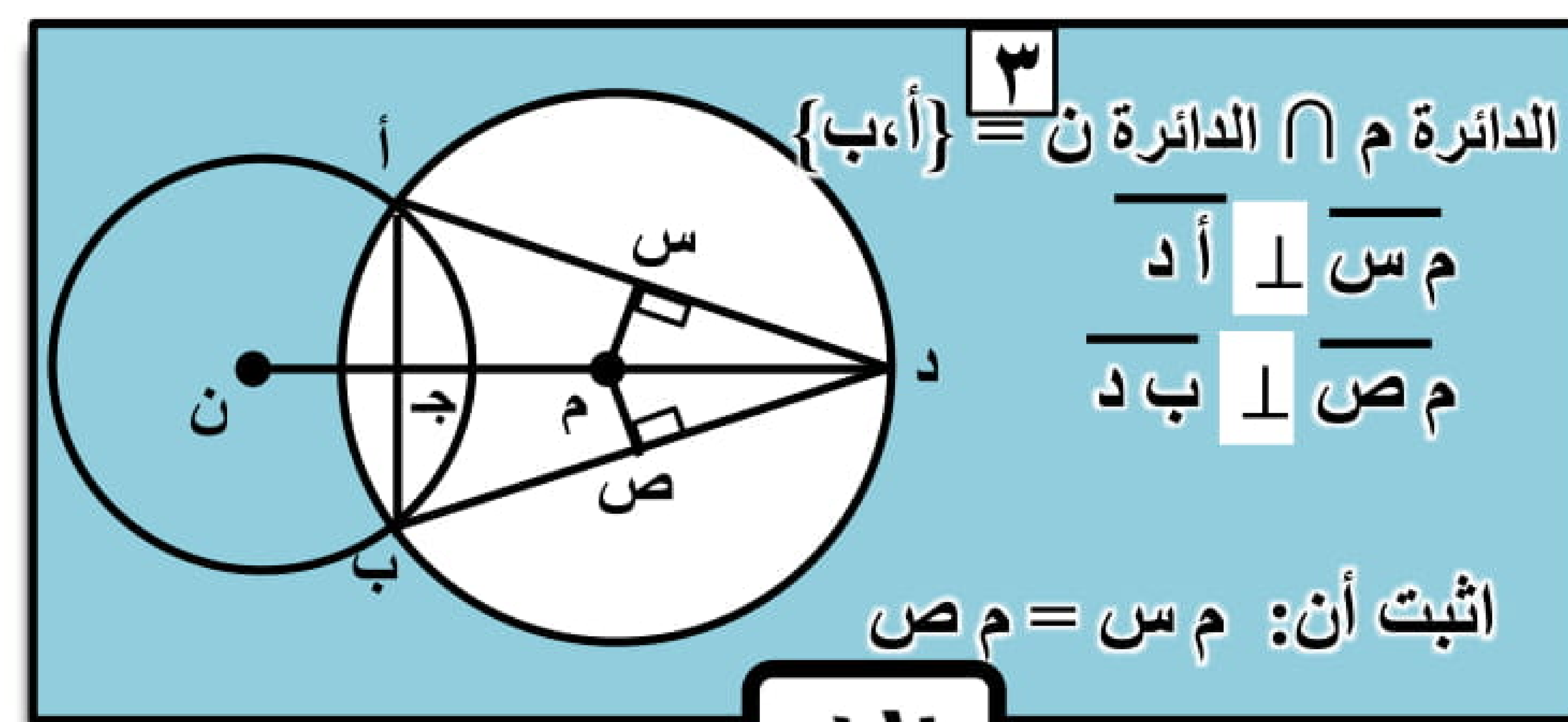
٣

الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ، ب}

م س ⊥ أ د

م ص ⊥ ب د

اثبت أن: م س = م ص



الحل

∵ أ ب وتر مشترك ، م ن خط المركزين

∴ م ن ⊥ أ ب ، جـ منتصف أ ب

أي أنه في Δ د أ ب : د جـ محور تماثل أ ب

لأن د جـ ⊥ أ ب و تنصفه

∴ Δ د أ ب متساوى الساقين

∴ د أ = د ب وهى أوتار متساوية

∴ م س = م ص أبعاد متساوية

ملحوظة: يمكن الإثبات عن طريق تطابق ΔΔ أدجـ ، ب دجـ

٤

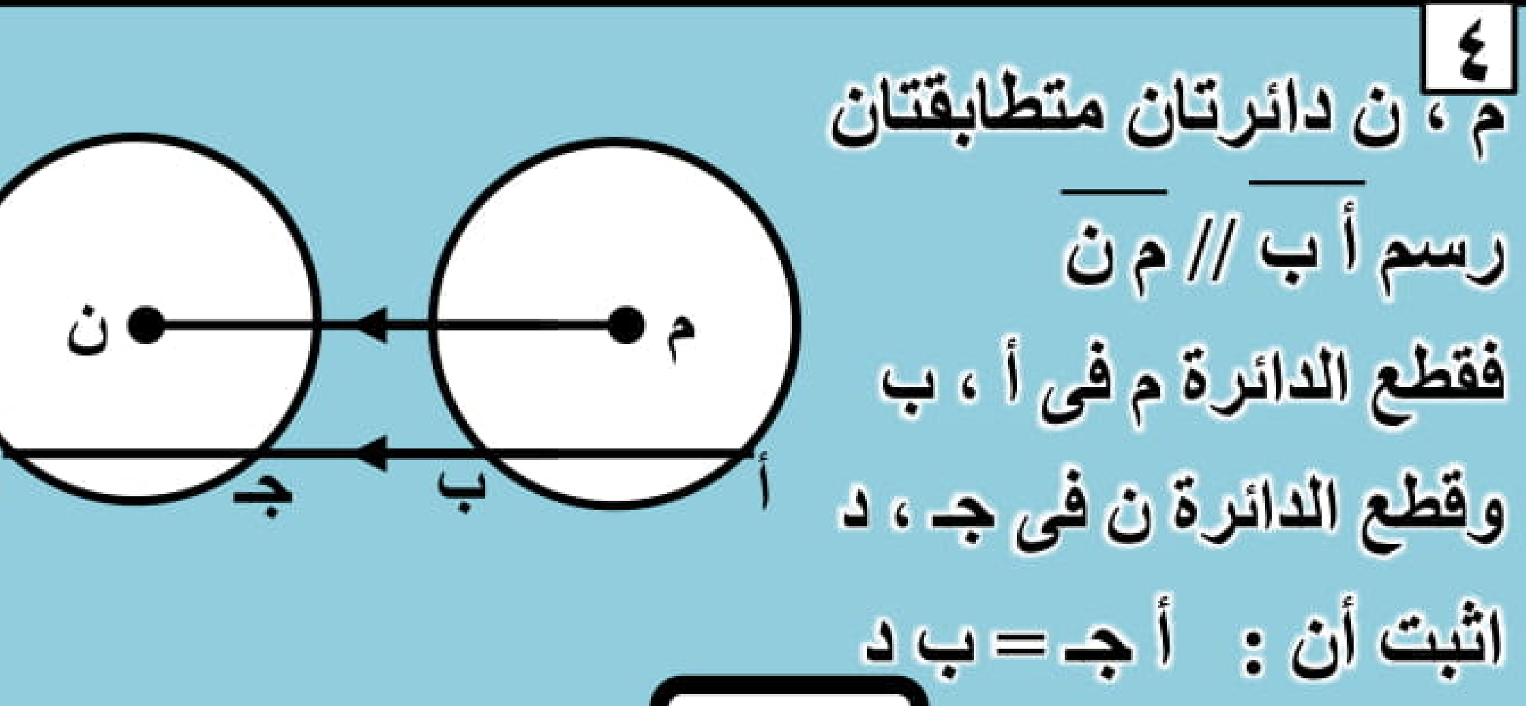
م ، ن دائرتان متطابقتان

رسم أ ب // م ن

فقطع الدائرة م فى أ ، ب

وقطع الدائرة ن فى جـ ، د

اثبت أن : أ جـ = ب د



الحل

العمل: نرسم م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ جـ د

∵ م ن // أ ب ، م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ جـ د

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ أ ب = جـ د (الأوتار متساوية)

بإضافة ب جـ للطرفين

∴ أ جـ = ب د هـ ط ث

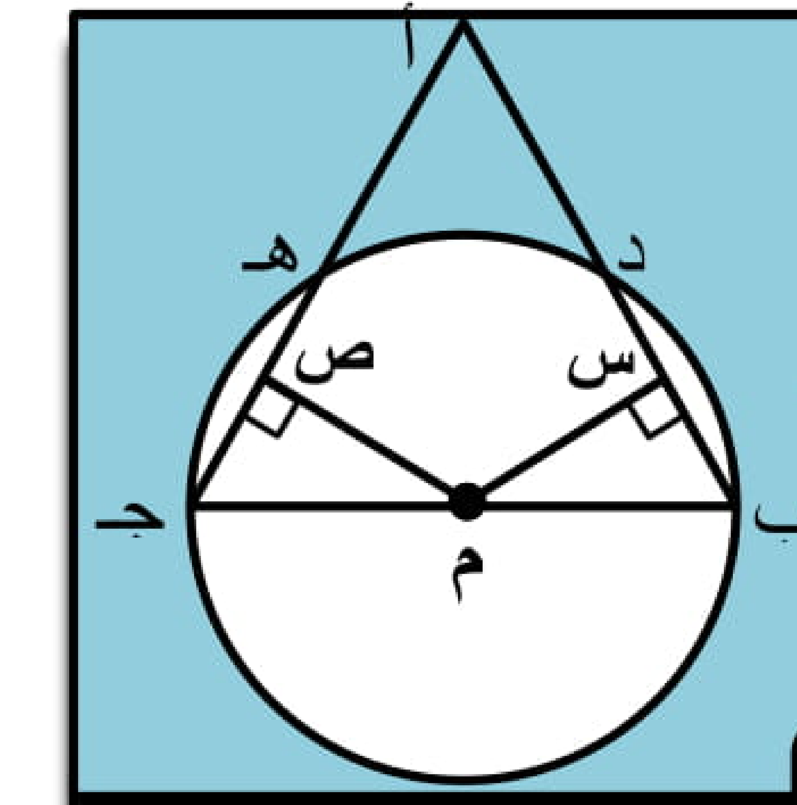
٥

أ ب جـ Δ فيه أ ب = أ جـ

م س ⊥ ب د ، م ص ⊥ جـ هـ

اثبت أن :

ب د = جـ هـ



الحل

Δ Δ م س ب ، م ص جـ فيهما :

م ب = م جـ أنصاف أقطار

ق(م س^ ب) = ق (م ص^ جـ) = ٩٠°

ق(ب^) = ق (جـ^) لأن أ ب = أ جـ

∴ Δ م س ب ≡ Δ م ص جـ

ومن التطابق ينتج أن : م س = م ص (أبعاد)

∵ م س ⊥ ب د ، م ص ⊥ هـ جـ

∴ ب د = جـ هـ

٦

أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

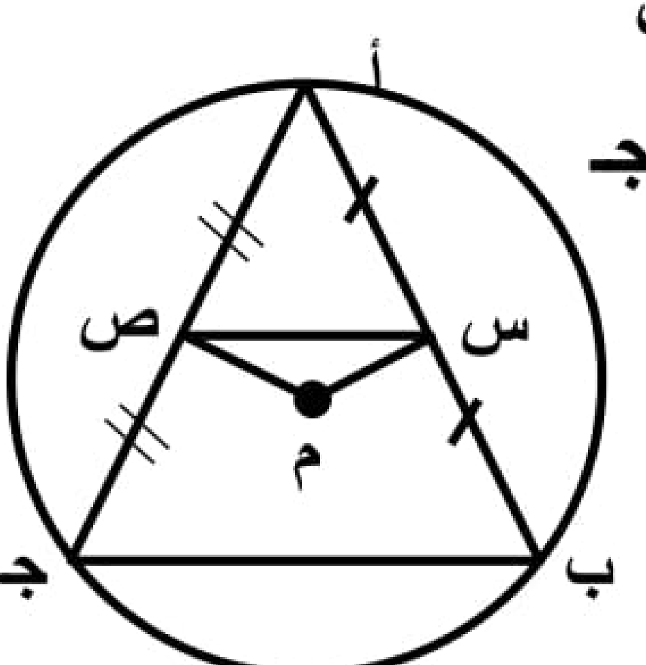
س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

ق (م س^ ص) = ٣٠°

اثبت أن : ١- Δ م س ص متساوى الساقين

٢- Δ أ س ص متساوى الأضلاع

الحل



∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∵ أ ب = أ جـ (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ Δ م س ص متساوى الساقين

∵ ق (م س^ ص) = ٣٠° ، ق (م س^ أ) = ٩٠°

∴ ق (أ س^ ص) = ٩٠ − ٣٠ = ٦٠°

، ق (أ ص^ س) = ٦٠° ∴ ق (أ^) = ٦٠°

∴ Δ أ س ص متساوى الأضلاع

١

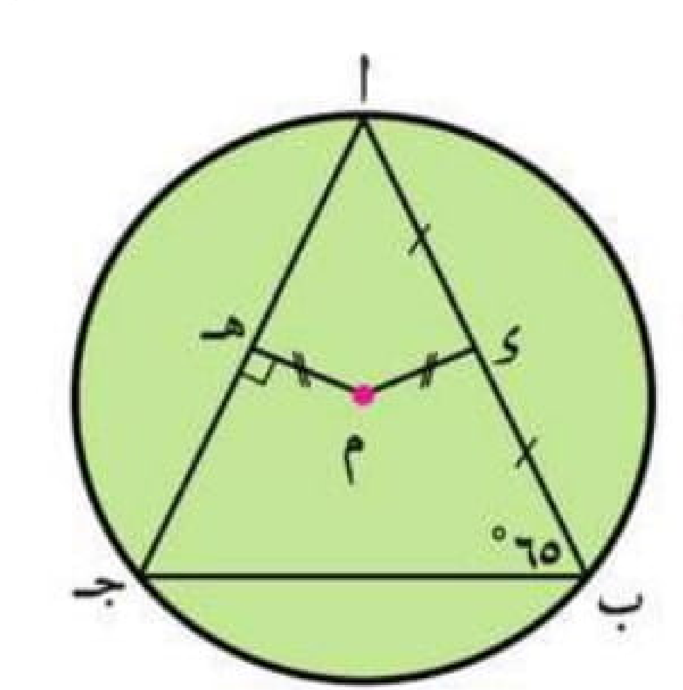
إذا كان:

م ى = م هـ

ق (∠ ب) = ٦٥°

فأوجد :

ق (∠ ا)



الحل

٢

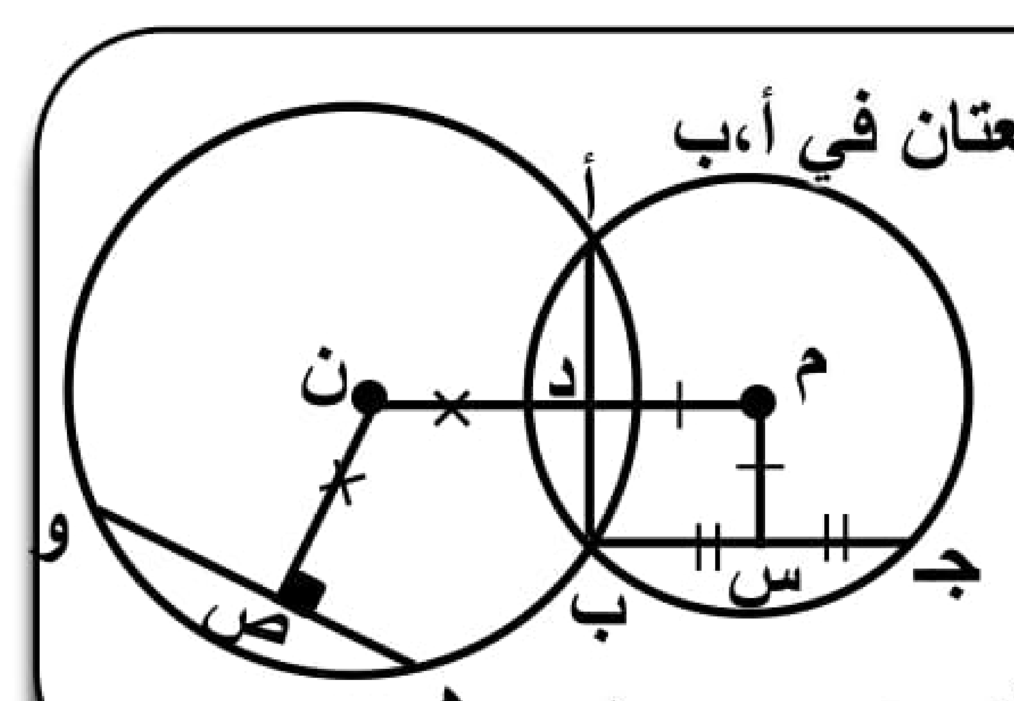
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ،ب

س منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$

م س = م د

ن ص = ن د

$\overline{\text{ن ص}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ و}}$ اثبت أن: جـ ب = و هـ



الحل

٣

دائرتان متحدتا المركز م

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\hat{\text{هـ}}$)

اثبت أن : جـ د = ع ل

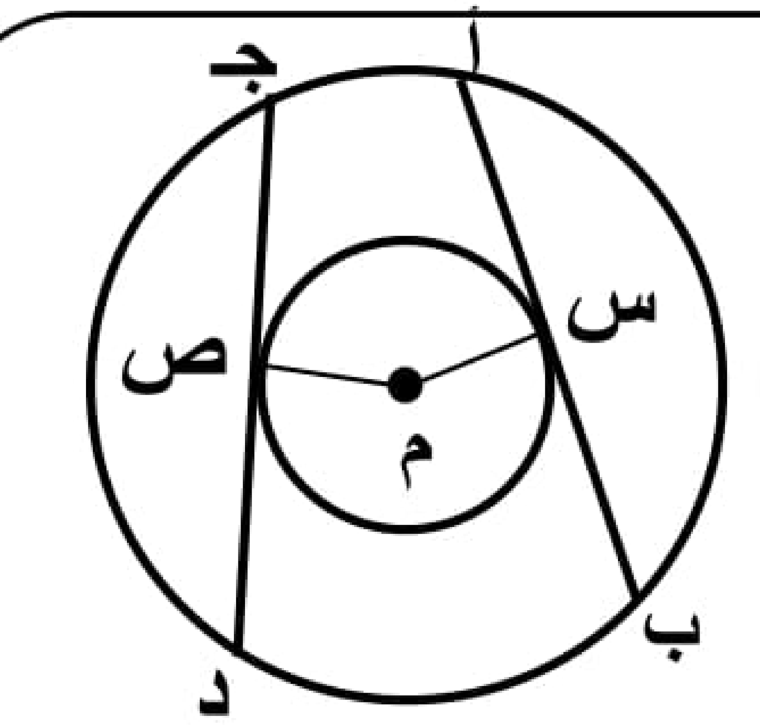
الحل

٤

دائرتان متحدتا المركز م

أ ب ، جـ د مماسان للصغرى

اثبت أن : أ ب = جـ د



الحل



الدرس الخامس 5 — تعيين الدائرة

تُعيَّن الدائرة إذا علم : ١- مركزها   ٢- طول نصف قطرها

رسم دائرة تمر بنقطة

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة واحدة.

رسم دائرة تمر بنقطتين

◆ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين.

◆ ولكن إذا علم طول القطعة المستقيمة أ ب وطول نصف قطر المطلوبة فإن:

- إذا كان نق > $\frac{1}{2}$ أ ب فإنه يمكن رسم **دائرتان** فقط .
- إذا كان نق = $\frac{1}{2}$ أ ب فإنه يمكن رسم **دائرة واحدة** فقط وهى **أصغر** دائرة .
- إذا كان نق < $\frac{1}{2}$ أ ب فإنه **لا يمكن** رسم أى دائرة .

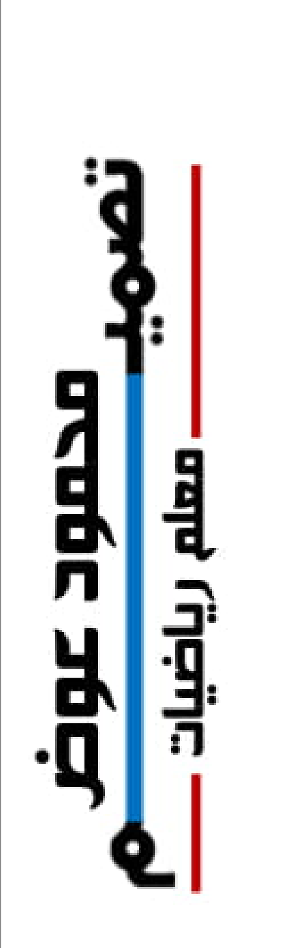
مثال: إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة طولها ٧ سم فإن أصغر دائرة يمكن أن تمر بالنقطتين أ ، ب طول نصف قطرها ......

رسم دائرة تمر بثلاث نقاط

◆ أي ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا يمكن أن تمر بها دائرة .

◆ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بيها دائرة وحيدة .

الدائرة الخارجة للمثلث	الدائرة الداخلة للمثلث
مركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها **(محاور تماثل أضلاعه)**	مركزها هو نقطة تقاطع **منصفات زواياه الداخلة**



ملاحظات

❖ **يمكن** رسم دائرة تمر برؤوس كل من : **المستطيل - المربع - شبه المنحرف المتساوى الساقين**

❖ **لا يمكن** رسم دائرة تمر برؤوس : **متوازى الأضلاع - المعين - شبه المنحرف غير المتساوى الساقين**



مثال ١

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم أ ب = ٦ سم
ثم ارسم دائرة قطرها ١٠ سم تمر بالنقطتين أ ، ب
وكم دائرة يمكن رسمها

الحل

نق = ٥ سم

$\frac{1}{2}$ أ ب = ٣سم

نق > $\frac{1}{2}$ أ ب

عدد الحلول دائرتان

مثال ٢

باستخدام الأدوات ارسم المثلث أ ب جـ القائم حيث
أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر
برؤوس المثلث ثم أوجد طول نصف قطرها

الحل

من فيثاغورث

أ جـ = ٥ سم

∵ المركز م ينصف وتر المثلث

∴ نق = ٢,٥ سم

5 تمارين

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1. عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو . . . .

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

2. لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

أ) المثلث ب) المربع جـ) المعين د) المستطيل

3. يمكن رسم دائرة تمر برؤوس ....

أ) معين ب) مستطيل جـ) شبه منحرف د) متوازى أضلاع

4. مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع . . . .

أ) متوسطات المثلث ب) ارتفاعات المثلث جـ) محاور تماثل أضلاعه د) منصفات زواياه الداخلة

5. مركز الدائرة الخارجة لأى مثلث هو نقطة تقاطع . . . .

أ) متوسطات المثلث ب) ارتفاعات المثلث جـ) محاور تماثل أضلاعه د) منصفات زواياه الداخلة

١) ارسم القطعة أ ب = ٤ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم تمر بالنقطتين أ ، ب

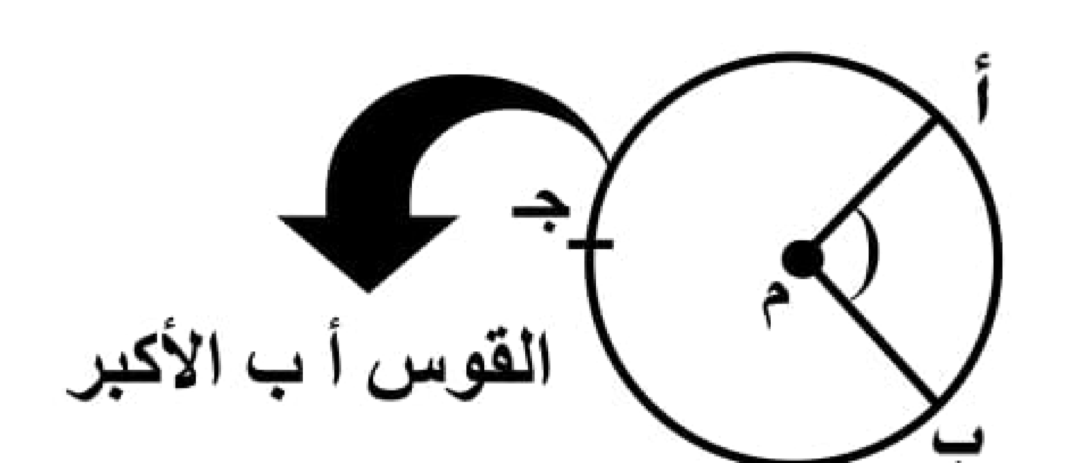
٢) ارسم △ أ ب جـ المتساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ سم ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ثم حدد موضع الدائرة بالنسبة لارتفاعاته.

الزاوية المركزية وقياس الأقواس

الزاوية المركزية

هي زاوية رأسها مركز الدائرة ويحمل ضلعيها أنصاف أقطار

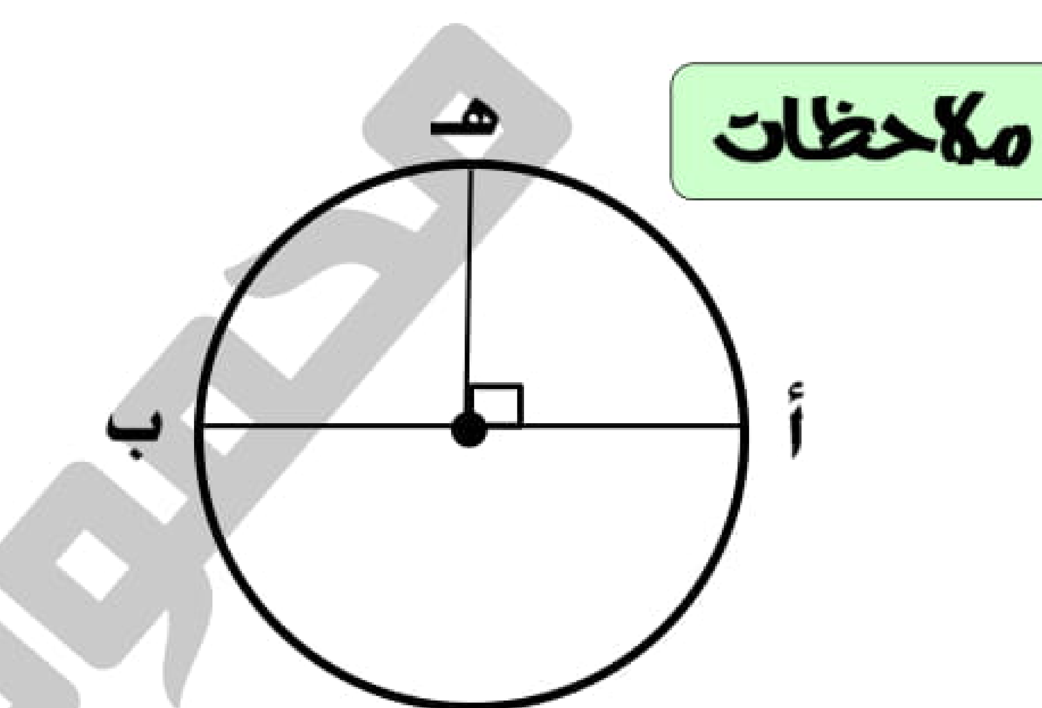
- أ م ب زاوية مركزية
- القوس المقابل لها هو القوس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$
- القوس أ جـ ب يسمى $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأكبر



قياس القوس

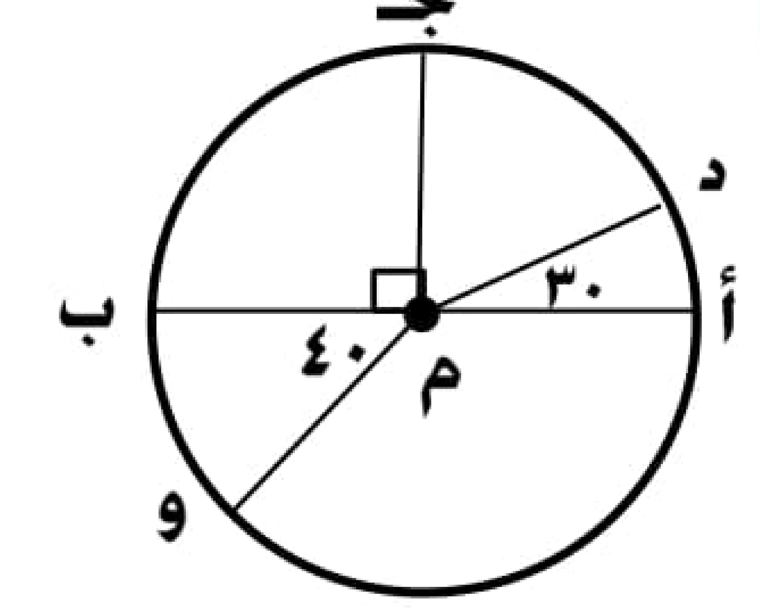
قياس القوس يساوى قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ملاحظات



- قياس الدائرة كلها = ٣٦٠°
- قياس نصف الدائرة = ١٨٠°
- قياس ربع الدائرة = ٩٠°
- قياس خُمس الدائرة = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢

مثال



ق ($\overset{\frown}{\text{أ د}}$) = ٣٠°   ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) = ٩٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{د جـ}}$) = ٩٠ ـ ٣٠ = ٦٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{د جـ ب}}$) = ٦٠ + ٩٠ = ١٥٠°

ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب و}}$) = ١٨٠ + ٤٠ = ٢٢٠°

تدريب

(دائرة مركزها م، أ، ب، جـ، د، هـ، و، ٧٥، ٤٠)

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ د}}$) = ...

ق ($\overset{\frown}{\text{أ و هـ}}$) = ...

طول القوس

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

مثال

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطرالدائرة ٧ سم .

الحل

قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ الدائرة = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

= $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١٤,٦ سم

تدريب

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٢}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطرالدائرة ٧ سم .

الحل

....

....

....

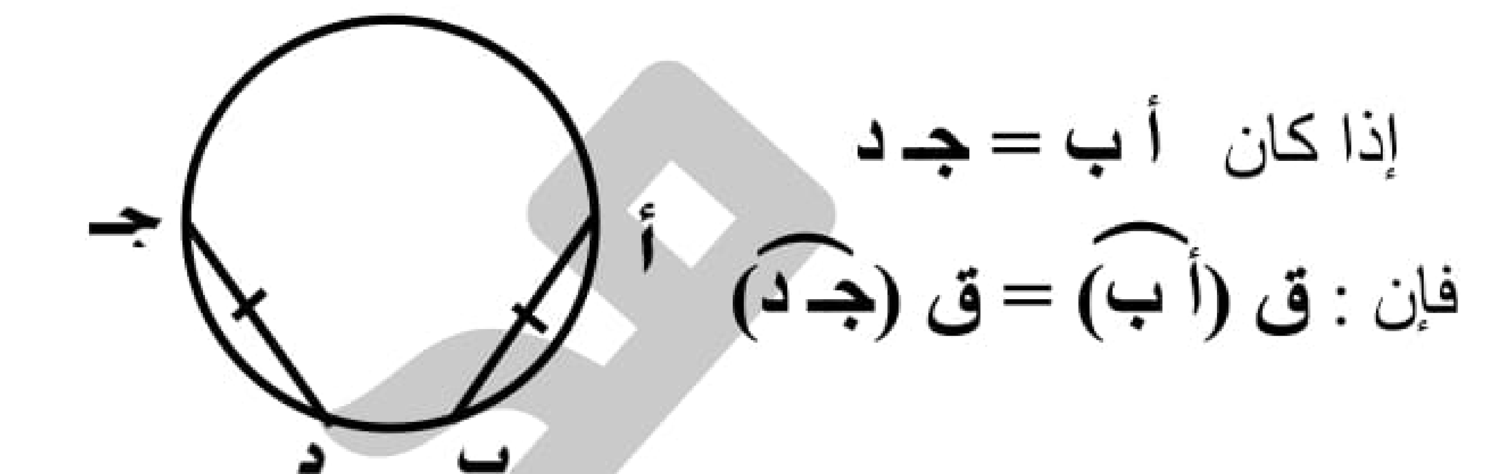
....

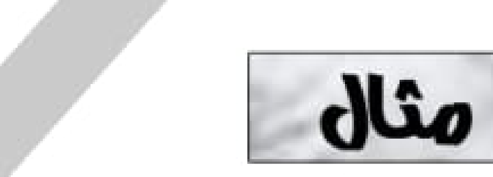
....

١ إذا كانت الأوتار متساوية فإن أقواسها تكون متساوية

إذا كان أ ب = جـ د

فإن : ق (أ ب⌢) = ق (جـ د⌢)





مثال

أ ب جـ △ متساوى الأضلاع

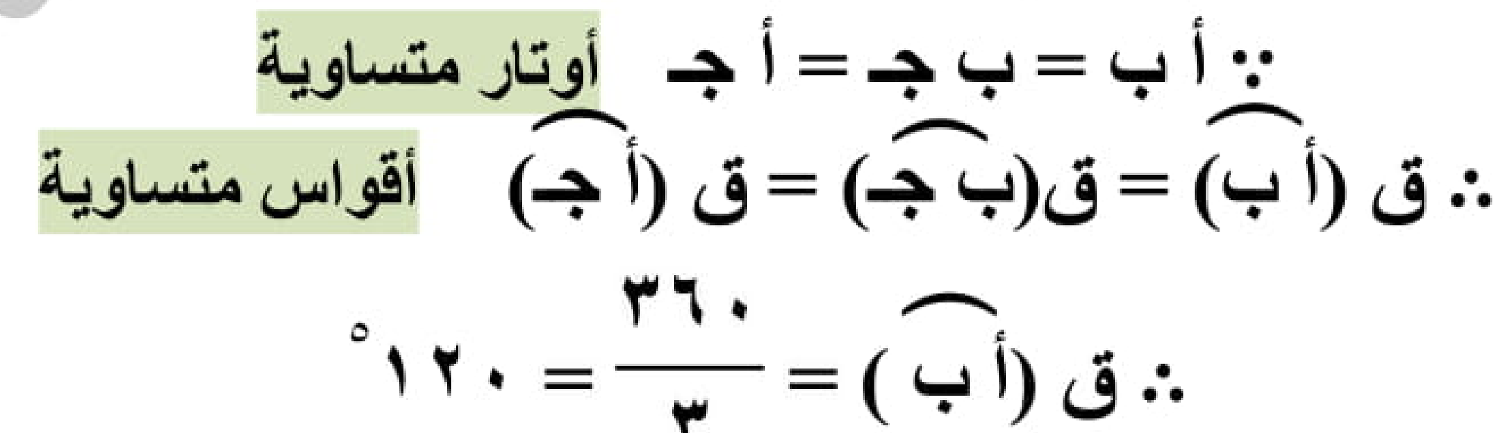
أوجد ق (أ ب⌢)



الحل

∵ أ ب = ب جـ = أ جـ أوتار متساوية

∴ ق (أ ب⌢) = ق(ب جـ⌢) = ق (أ جـ⌢) أقواس متساوية

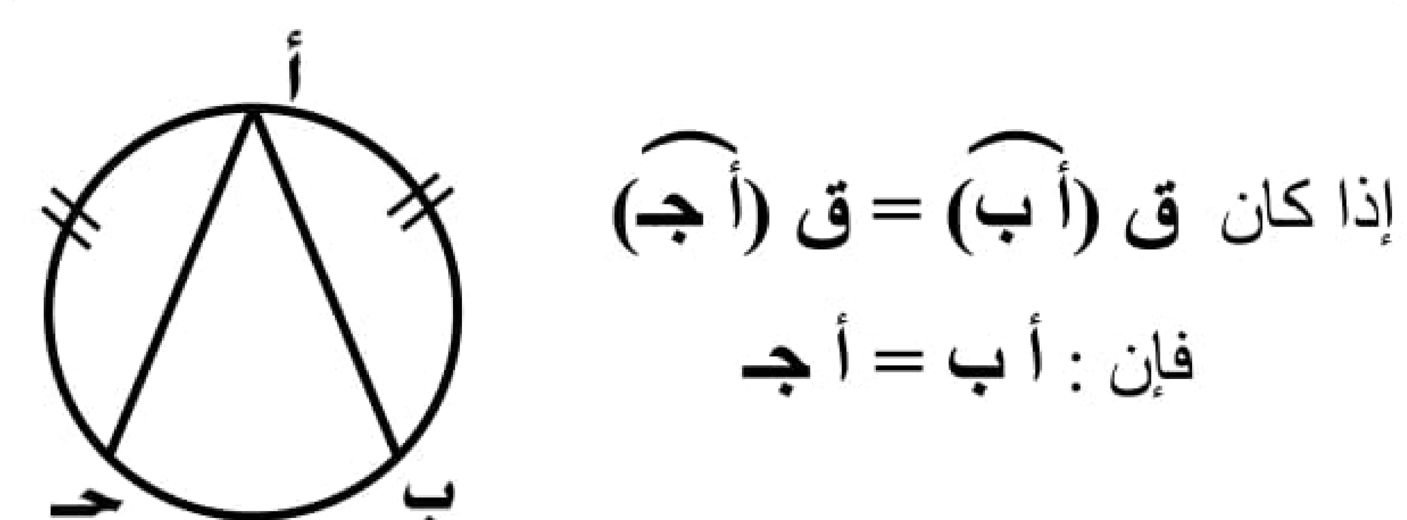


∴ ق (أ ب⌢) = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠°

٢ إذا كانت الأقواس متساوية فإن أوتارها تكون متساوية

إذا كان ق (أ ب⌢) = ق (أ جـ⌢)

فإن : أ ب = أ جـ



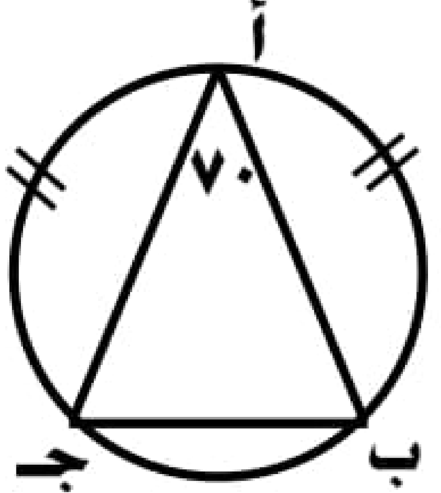


مثال

ق (أ ب⌢) = ق (أ جـ⌢)

ق (أ^) = ٧٠

فأوجد ق (ب^)



الحل

∵ ق (أ ب⌢) = ق (أ جـ⌢) أقواس متساوية

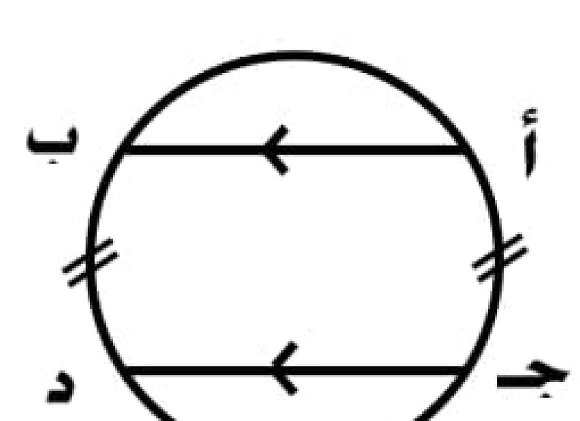
∴ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

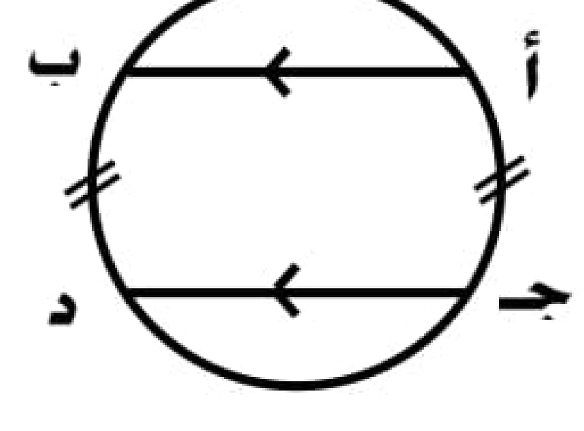
∴ ق (ب^) = ق (جـ^) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

٣ الوتران المتوازيان يحصران قوسان متساويان

إذا كان أ ب // جـ د

فإن ق (أ جـ⌢) = ق (ب د⌢)





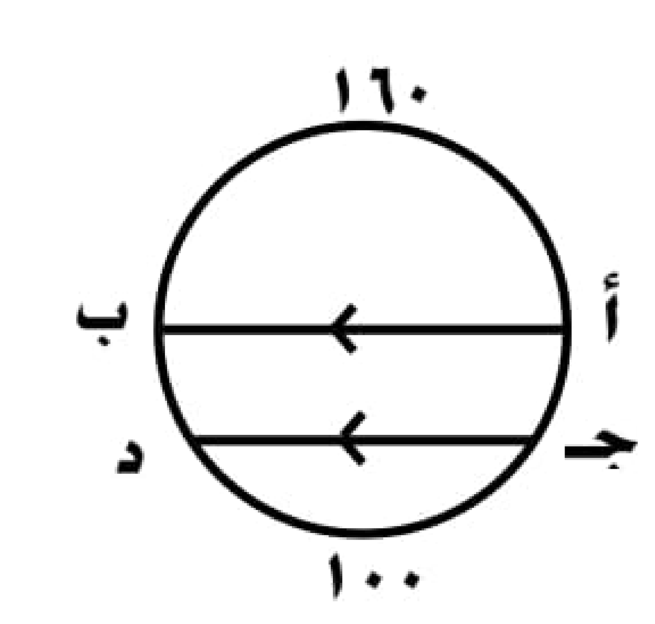
تدريب

إذا كان أ ب // جـ د

، ق (أ ب⌢) = ١٦٠°

ق (جـ د⌢) = ١٠٠°

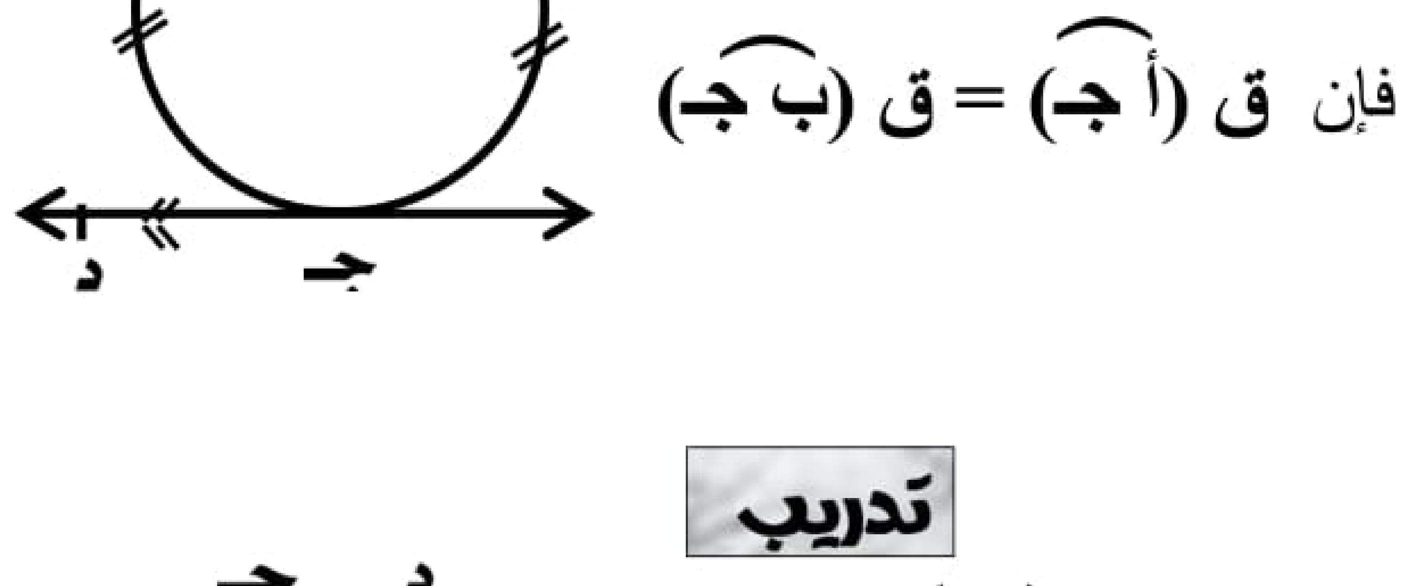
فإن ق (أ جـ⌢) = ...



٤ الوتر والمماس المتوازيان يحصران قوسان متساويان

إذا كان أ ب // جـ د (مستقيم)

فإن ق (أ جـ⌢) = ق (ب جـ⌢)

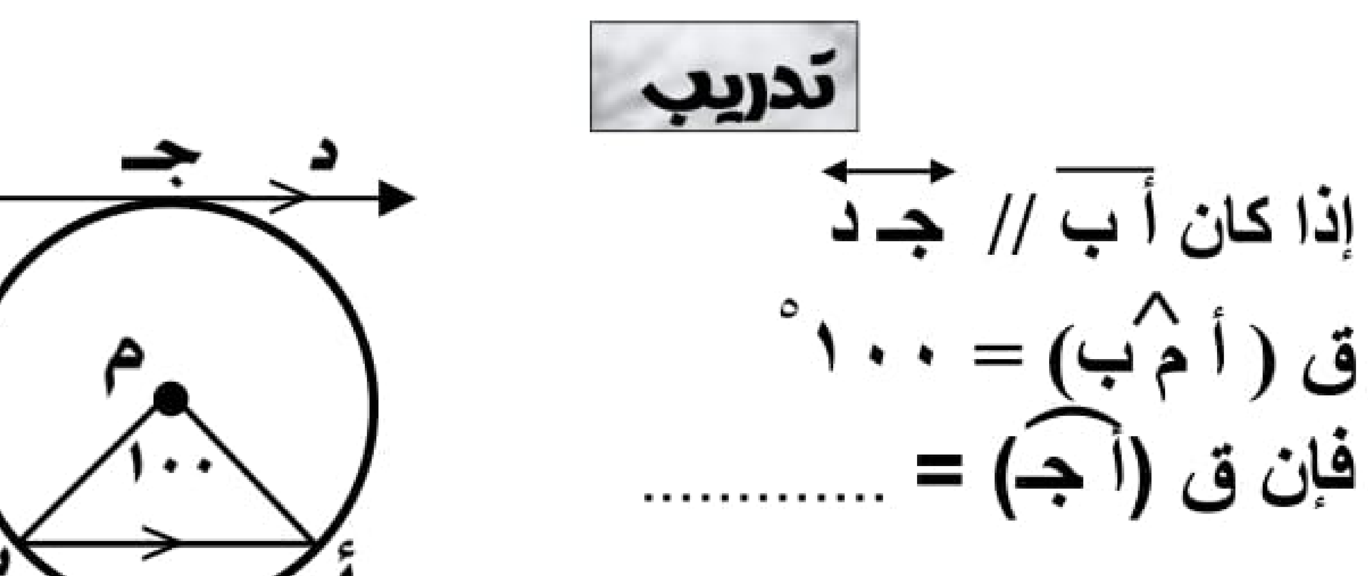


تدريب

إذا كان أ ب // جـ د (مستقيم)

ق (أ م^ ب) = ١٠٠°

فإن ق (أ جـ⌢) = ...



٥ في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في الطول متساوية في القياس

١

أ ب قطر فى الدائرة م

ق (أ هـ^ جـ) = ٣٠°

ق (أ جـ⌒) = ٨٠°

أوجد ق (جـ د⌒)

الحل

العمل : نرسم م جـ ، م د

∵ ق(أ جـ⌒) = ٨٠° ∴ ق (أ م^ جـ) = ٨٠°

∵ أ م^ جـ زاوية خارجة عن Δ جـ م هـ

∴ ق (م جـ^ هـ) = ٨٠ – ٣٠ = ٥٠°

في Δ جـ م د : ∵ م جـ = م د (أنصاف أقطار)

∴ ق (جـ م^ د) = ١٨٠ – (٥٠ + ٥٠) = ٨٠°

∴ ق (جـ د⌒) = ٨٠°

٣

م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم

، أ ب ، جـ د وتران متوازيان

ق (أ جـ⌒) = ٨٠°

طول (أ جـ⌒) = طول (أ ب⌒)

أوجد : ١- ق(م أ^ ب)

٢- ق (جـ د⌒) ٣- طول (جـ د⌒)

الحل

∵ طول (أ جـ⌒) = طول (أ ب⌒)

∴ ق (أ جـ⌒) = ق (أ ب⌒) = ٨٠°

∴ ق (أ م^ ب) المركزية = ٨٠°

∵ م أ = م ب (أنصاف أقطار) ∴ Δ م أ ب متساوى الساقين

∴ ق (م أ^ ب) = ق (م ب^ أ) = ٥٠° **المطلوب الأول**

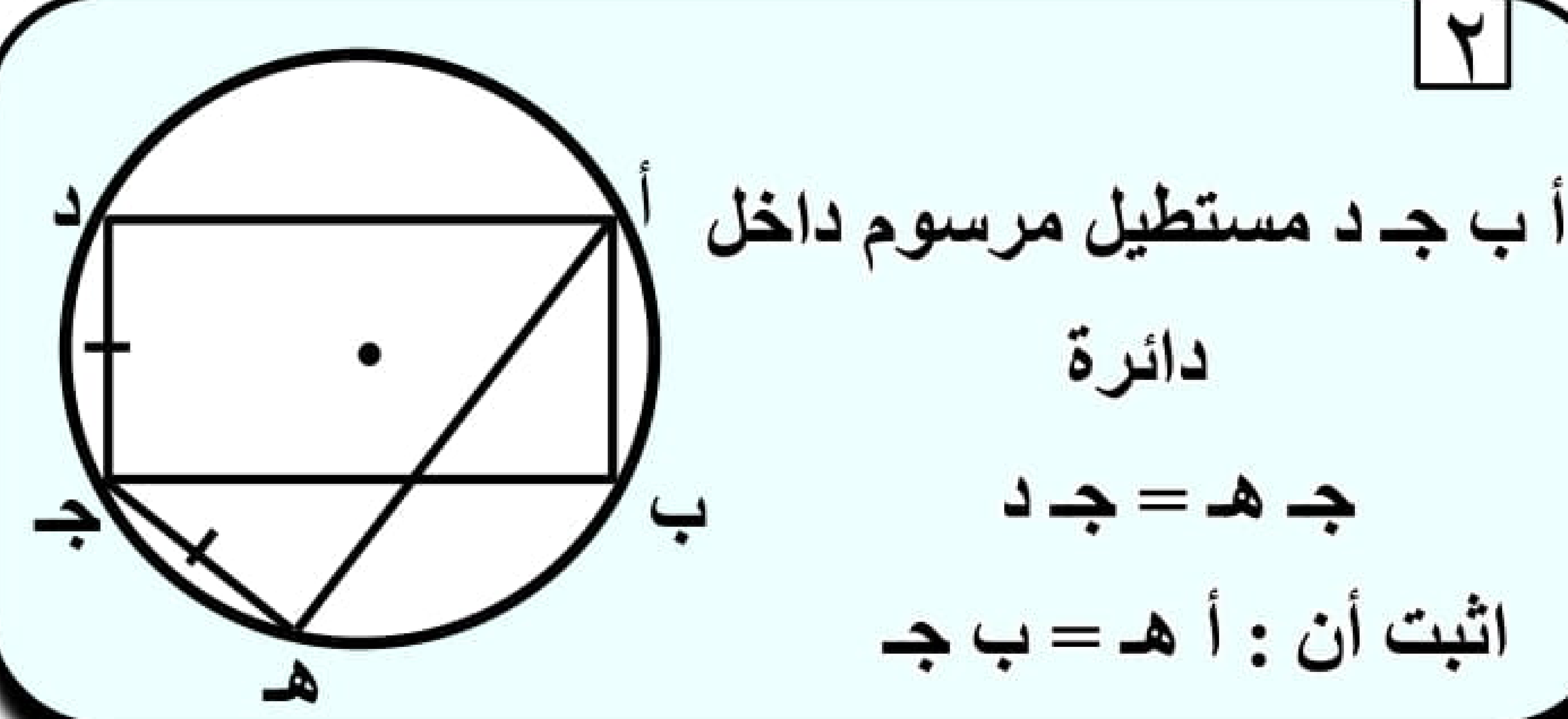
∵ أ ب // جـ د ∴ ق (أ جـ⌒) = ق (ب د⌒) = ٨٠°

∵ ق(جـ د⌒) + ق(أ جـ⌒) + ق(أ ب⌒) + ق(ب د⌒) = ٣٦٠°

∴ ق (جـ د⌒) = ٣٦٠ – (٨٠ + ٨٠ + ٨٠) = ١٢٠°

طول جـ د⌒ = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥ = ٣١,٤ سم

٢



أ ب جـ د مستطيل مرسوم داخل دائرة

جـ هـ = جـ د

اثبت أن : أ هـ = ب جـ

الحل

∵ أ ب = د جـ **خواص المستطيل**

، هـ جـ = د جـ (معطى)

∴ أ ب = هـ جـ

∴ ق (أ ب⌒) = ق (هـ جـ⌒)

بإضافة ق (ب هـ⌒) للطرفين

∴ ق (أ هـ⌒) = ق (ب جـ⌒)

∴ أ هـ = ب جـ هـ ط ث

٤

أ ب جـ د هـ خماسى منتظم مرسوم داخل الدائرة م

أ س مماس للدائرة عند أ

هـ س مماس للدائرة عند هـ

أوجد: ١- ق (أ هـ⌒) ٢- ق (أ س^ هـ)

الحل

العمل : نرسم م أ ، م هـ

∵ أ ب جـ د هـ خماسى منتظم

∴ أ ب = ب جـ = جـ د = د هـ = أ هـ

∴ ق(أ ب⌒) = ق(ب جـ⌒) = ق(جـ د⌒) = ق (د هـ⌒) = ق(أ هـ⌒)

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق(أ هـ⌒) = $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢° **أولا**

∵ ق(أ هـ⌒) = ٧٢° ∴ ق(أ م^ هـ) = ٧٢°

∵ أ س مماس ∴ ق(م أ^ س) = ٩٠°

∵ هـ س مماس ∴ ق(م هـ^ س) = ٩٠°

في الشكل الرباعى م أ س هـ :

ق(أ س^ هـ) = ٣٦٠ – (٧٢ + ٩٠ + ٩٠) = ١٠٨°





اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1) قياس القوس الذى يمثل ثلث قياس الدائرة = ...

أ) ٣٦٠ ب) ١٨٠ جـ) ١٢٠ د) ٩٠

2) طول نصف الدائرة التي طول نصف قطرها نق سم = ... سم

أ) ٢ π نق ب) $\frac{١}{٤}$ π نق جـ) $\frac{١}{٣}$ π نق د) π نق

3) قياس الزاوية المركزية المرسومة فى $\frac{١}{٣}$ دائرة = ...

أ) ٢٤٠ ب) ١٢٠ جـ) ٦٠ د) ٣٠

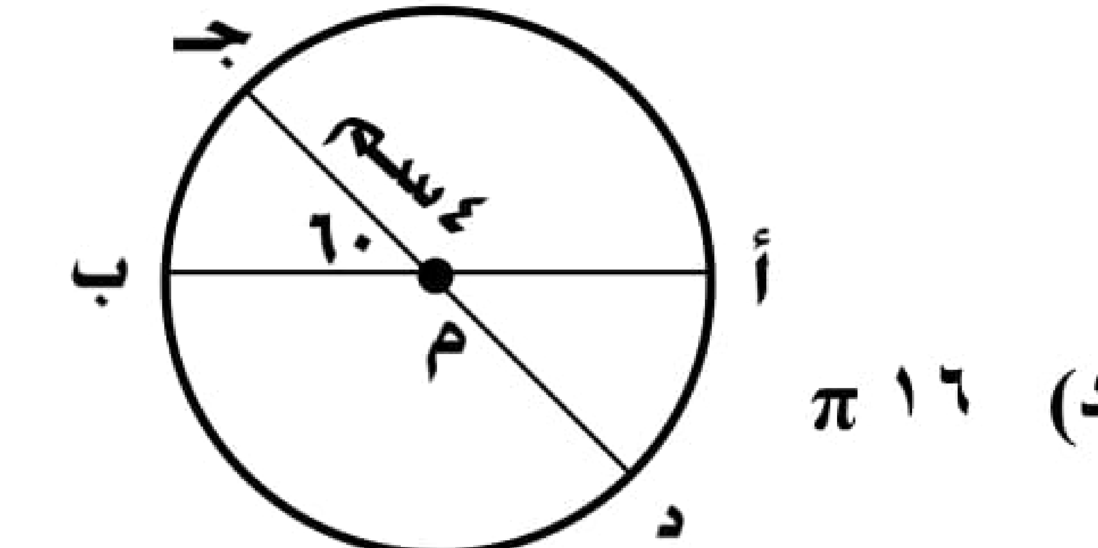
4) قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله $\frac{١}{٣}$ π نق = ...

أ) ٣٠ ب) ٦٠ جـ) ١٢٠ د) ٢٤٠

5) **في الشكل المقابل** : م دائرة ، م جـ = ٤ سم

ق (جـ م̂ ب) = ٦٠° فإن طول ب⌒د = ...

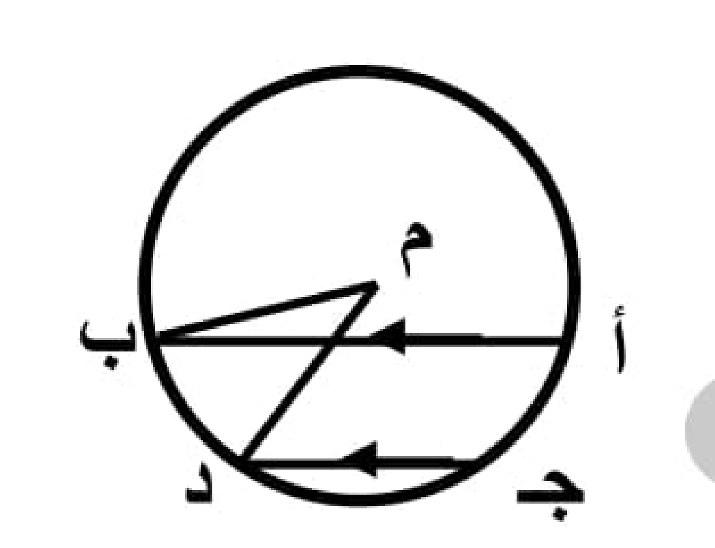
أ) ٤ π ب) ٨ π جـ) $\frac{٨}{٣}$ π د) ١٦ π



6) **في الشكل المقابل** : م دائرة ، أب // جـ د

ق (أ⌒جـ) = ٣٠° فإن ق (ب م̂ د) = ...

أ) ١٠° ب) ١٥° جـ) ٣٠° د) ٦٠°



١) أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٥}$ الدائرة .

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطرالدائرة ٧ سم .

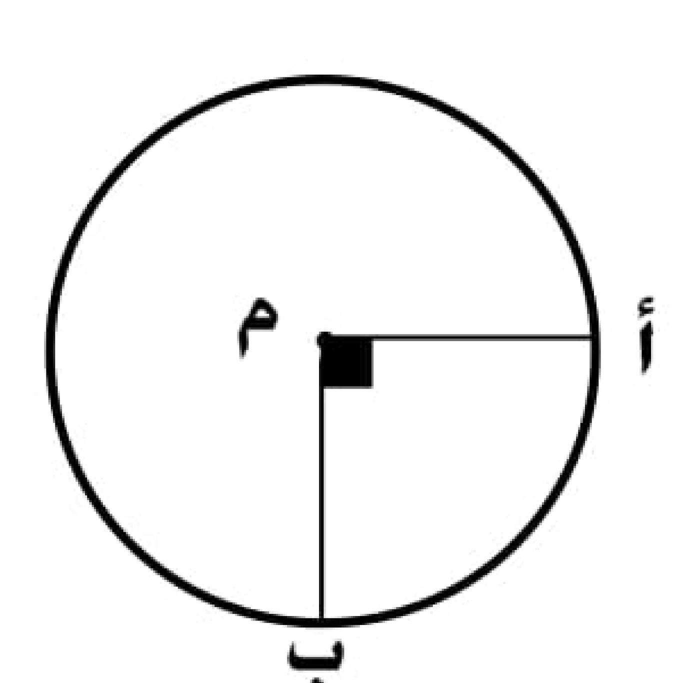
٢) **في الشكل المقابل:**

م دائرة ، ق (أ م̂ ب) = ٩٠

طول نصف قطرها = ٧ سم

أوجد طول أ⌒ب

حيث π = $\frac{٢٢}{٧}$



٣) **في الشكل المقابل:**

أ ب جـ د شكل رباعى

أ ب = جـ د

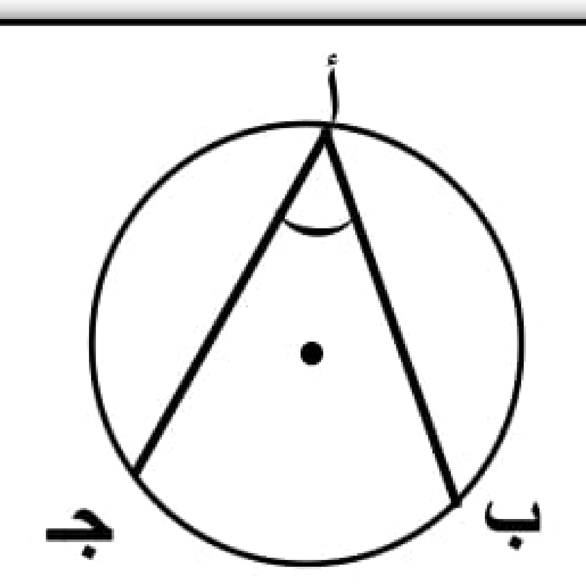
اثبت أن:

أ جـ = ب د

الدرس الثانى 2 العلاقة بين المحيطية والمركزية

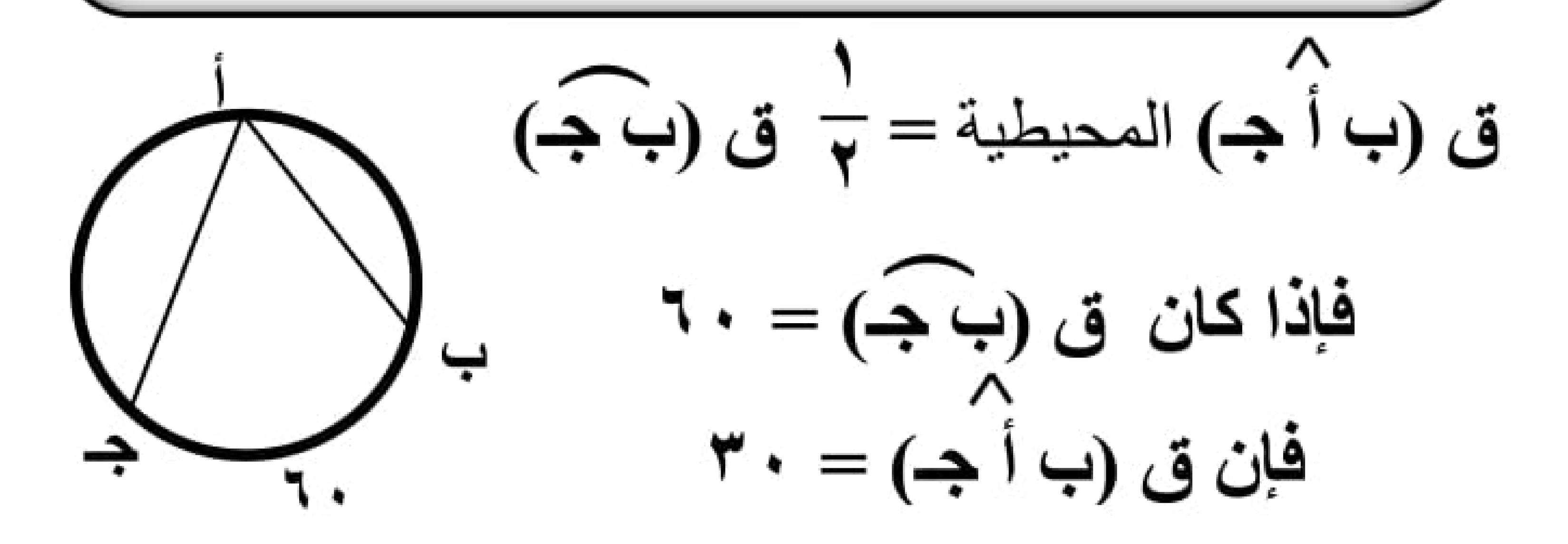
الزاوية المحيطية

هي زاوية رأسها على الدائرة ويحمل ضلعيها وتران



- ب أ جـ زاوية محيطية
- القوس المقابل لها هو ب⌒جـ

قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس القوس المقابل لها

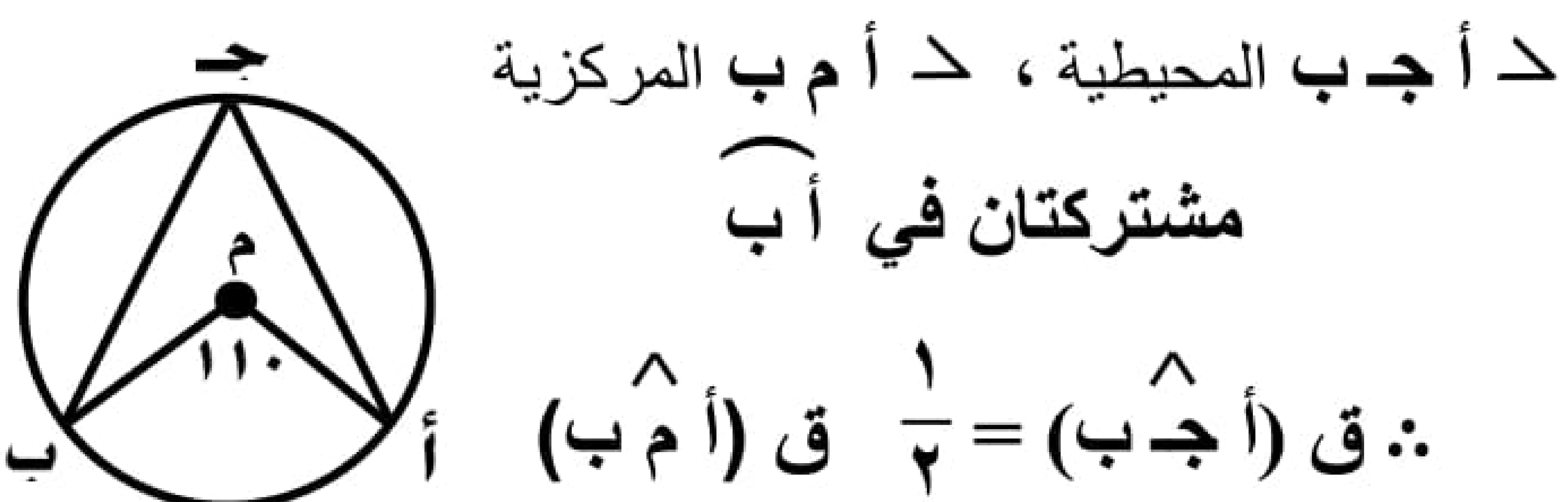


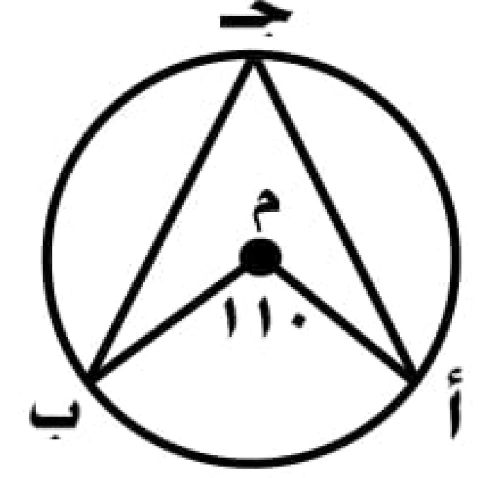
ق (ب أ^ جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (ب⌒جـ)

فإذا كان ق (ب⌒جـ) = ٦٠

فإن ق (ب أ^ جـ) = ٣٠

قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس المركزية المشتركة معها في القوس





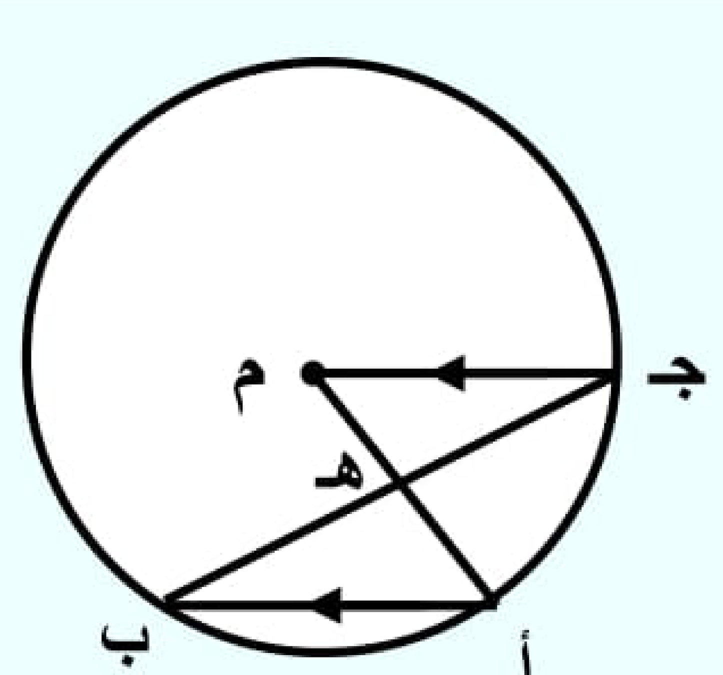
∠ أ جـ ب المحيطية ، ∠ أ م ب المركزية

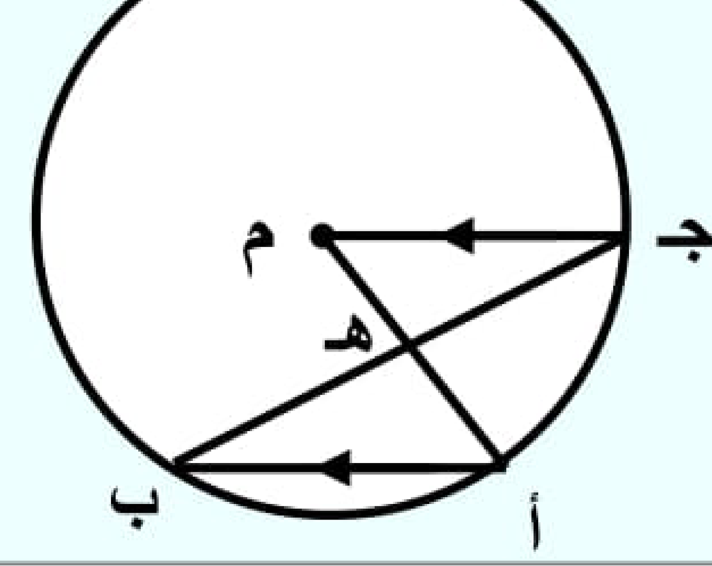
مشتركتان في أ⌒ب

∴ ق (أ جـ^ ب) = $\frac{1}{2}$ ق (أ م^ ب)



الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة





∵ أ ب قطر

∴ ق (جـ^) المحيطية = ٩٠°

لأنها محيطية القوس المقابل لها نصف دائرة

مثال ١

أ ب وتر فى الدائرة م

جـ م // أ ب

اثبت أن : ب هـ > أ هـ

الحل

∵ ق (م^) = ٢ ق (ب^)

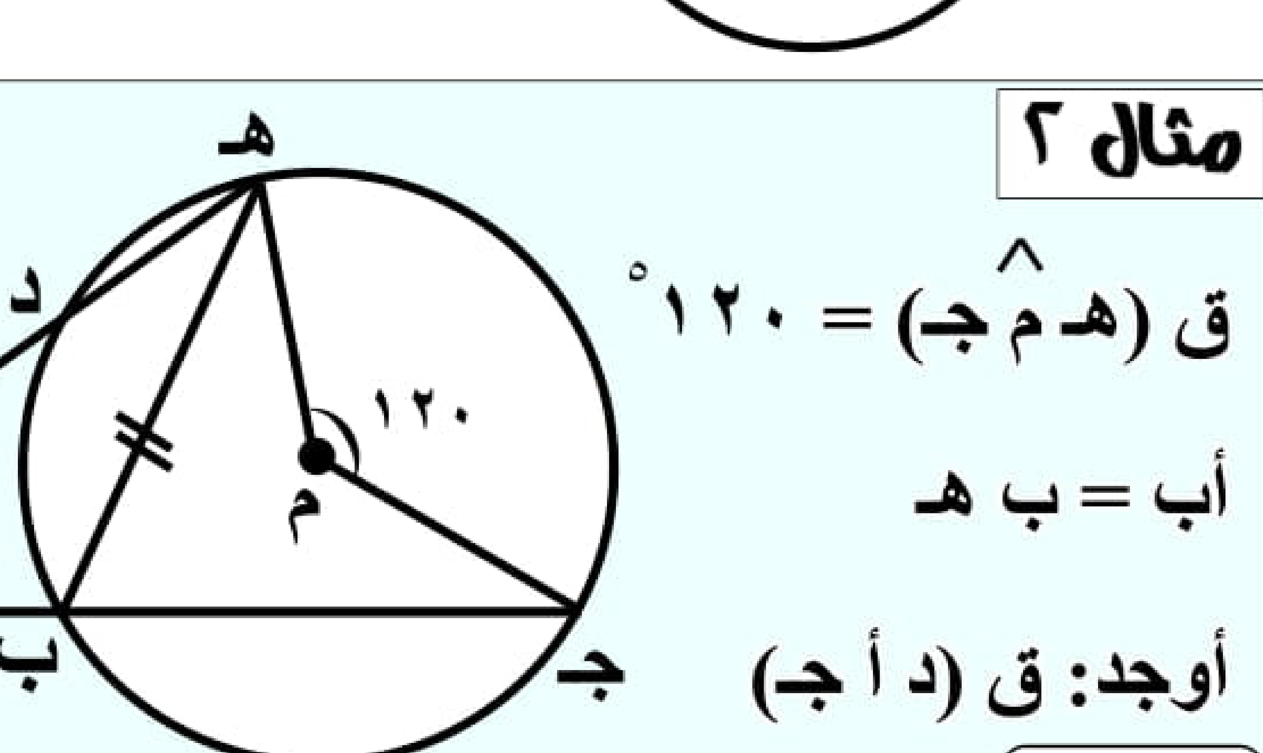
مركزية ومحيطية مشتركتان في أ⌒جـ

، ∵ جـ م // أ ب ∴ ق (م^) = ق (أ^) بالتبادل

فى △ أ هـ ب : ∴ ق (أ^) = ٢ ق (ب^)

∴ ق (أ^) > ق (ب^) ∴ ب هـ > أ هـ

مثال ٢

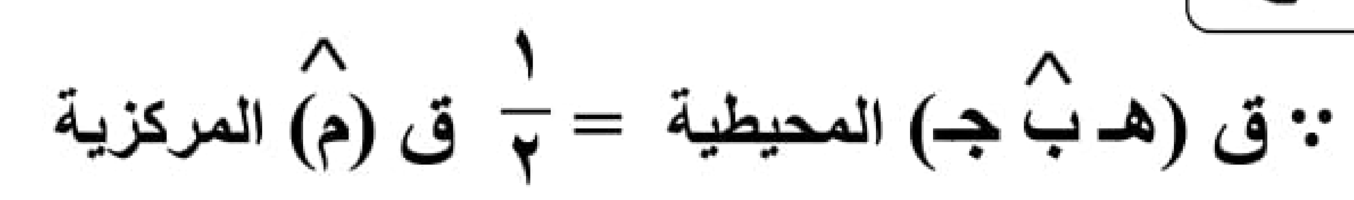


ق (هـ م^ جـ) = ١٢٠°

أب = ب هـ

أوجد: ق (د أ جـ)

الحل



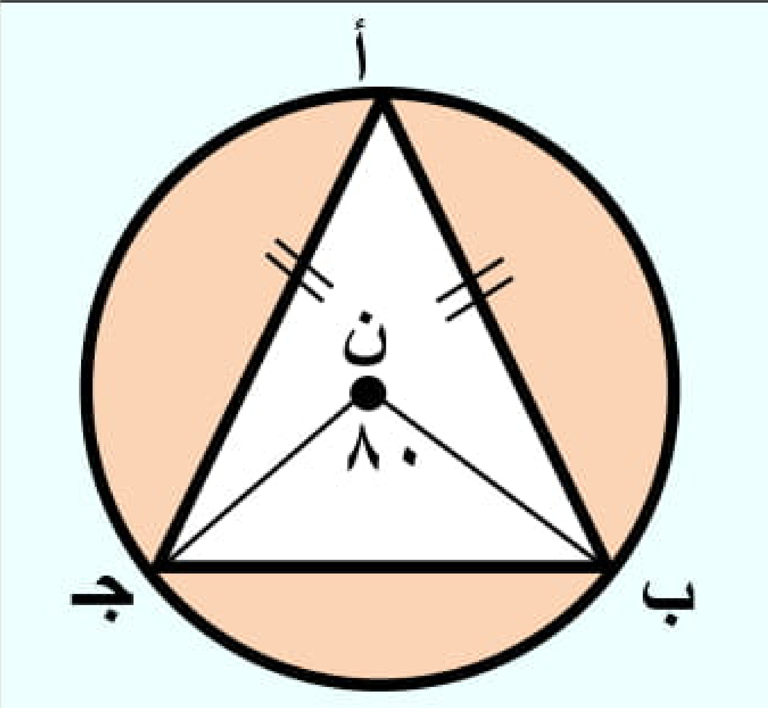
∵ ق (هـ ب^ جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (م^) المركزية

لأنهما مشتركتان في أ⌒جـ ∴ ق (هـ ب^ جـ) = ٦٠°

∵ أ ب = ب هـ

∴ ق(ب هـ^ أ) = ق (هـ أ^ ب) = $\frac{٦٠}{٢}$ = ٣٠°

مثال٣



أ ب = أ جـ ،

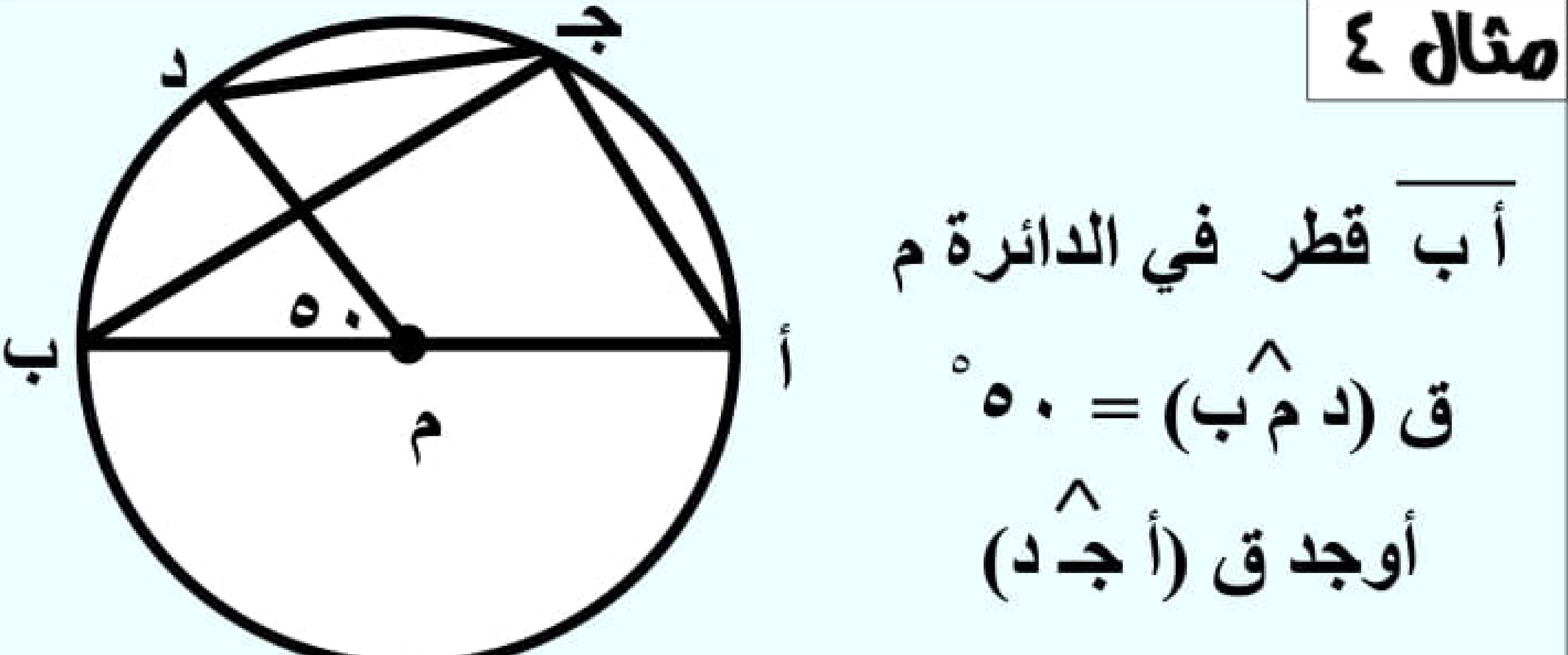
ق(ب $\hat{ن}$ جـ) = ٨٠°

أوجد: ١) ق(أ $\hat{ب}$ جـ)

٢) ق (ب جـ⌒) الأكبر

الحل

مثال ٤





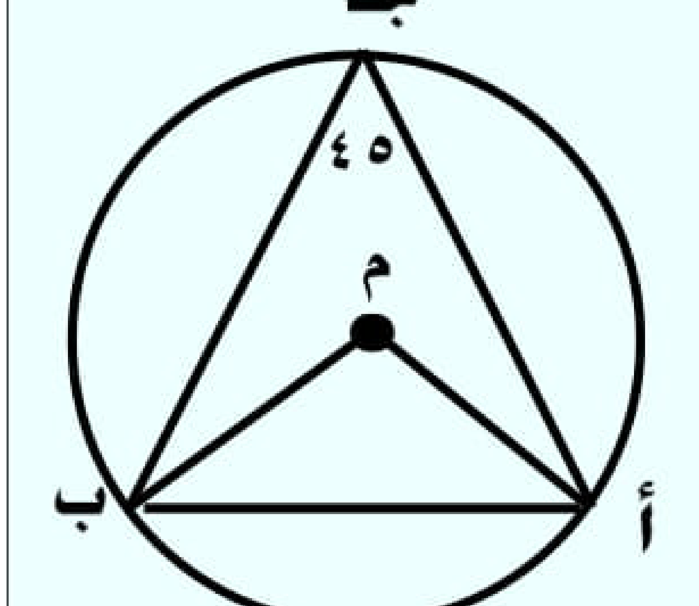
$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م

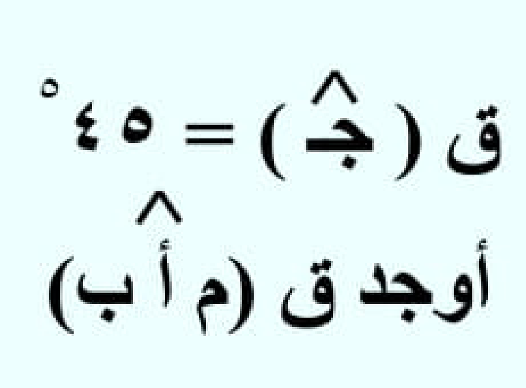
ق (د $\hat{م}$ ب) = ٥٠°

أوجد ق (أ $\hat{جـ}$ د)

الحل

تدريب ١





ق ($\hat{جـ}$) = ٤٥°

أوجد ق (م $\hat{أ}$ ب)

الحل

تدريب٢

$\overline{أ ب}$ قطر ، $\overline{أ جـ}$ مماس

هـ منتصف $\overline{د ب}$

م ب = ٦ سم ، أ جـ = ٩ سم

أوجد طول كل من :

$\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ د}$ ، $\overline{م هـ}$

الحل



1) النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس = ...

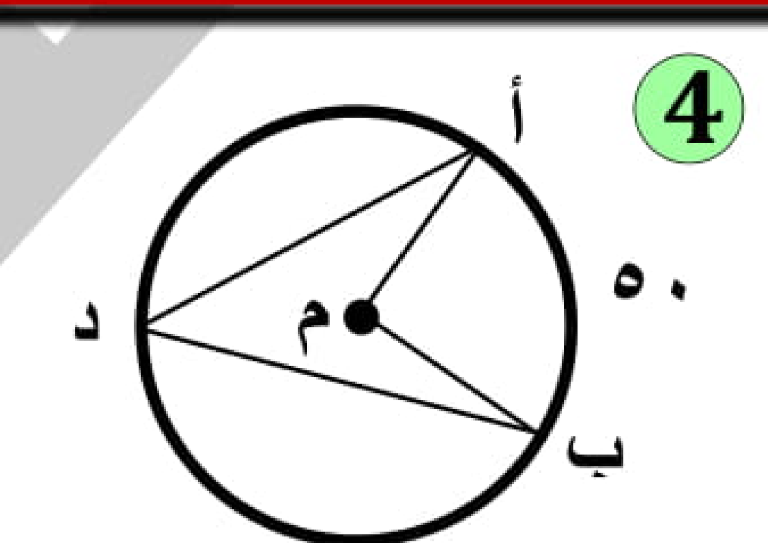
أ) ١ : ٢ ب) ١ : ٣ جـ) ٢ : ١ د) ٣ : ١

2) قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = ...

أ) ٤٥° ب) ٩٠° جـ) ١٢٠° د) ١٨٠°

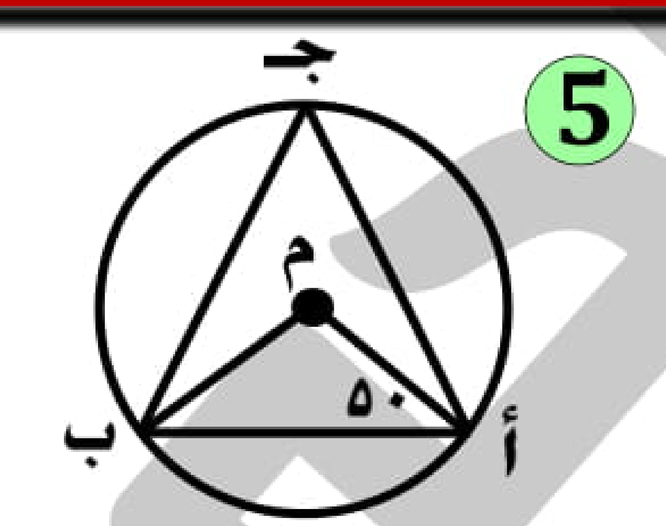
3) الزاوية المحيطية التي تقابل قوسا أصغر في الدائرة تكون ....

أ) منعكسة ب) قائمة جـ) منفرجة د) حادة

4) 

إذا كان ق (أ ب) = ٥٠°

فإن ق (أ د ب) = ...

5) 

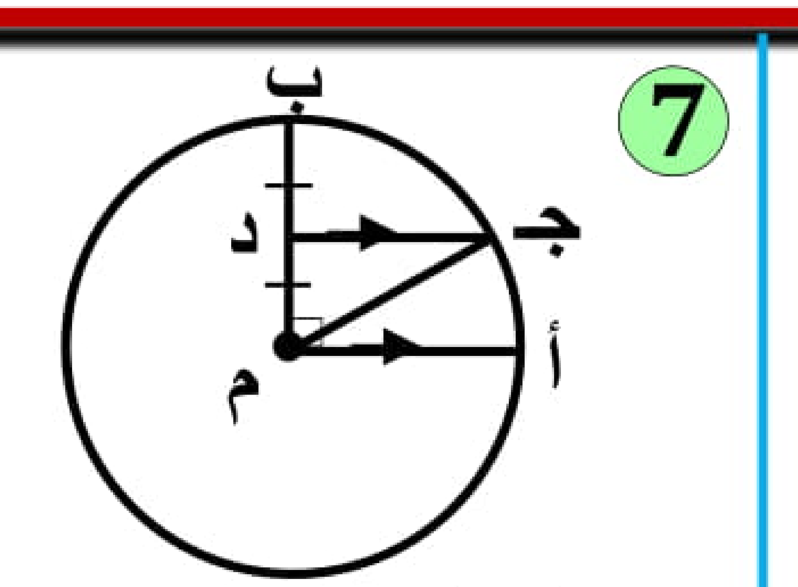
إذا كان ق (م أ ب) = ٥٠

فإن ق (جـ) = ...

6) 

أ ب جـ Δ متساوى الأضلاع

فإن ق (ب م جـ) = ...

7) 

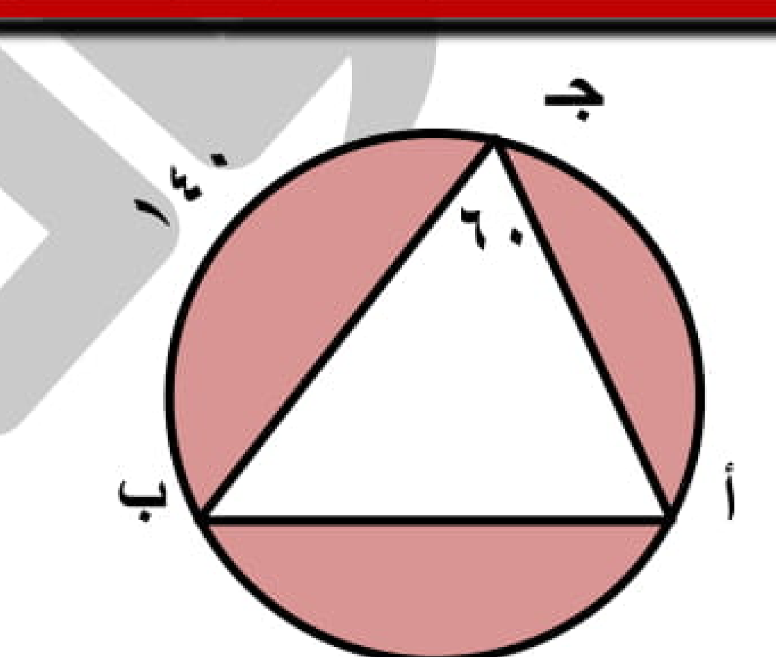
أم // جـ د ، ب د = د م

فإن ق (أ جـ) = ...

١) ق (جـ) = ٦٠°

ق (جـ ب) = ١٤٠°

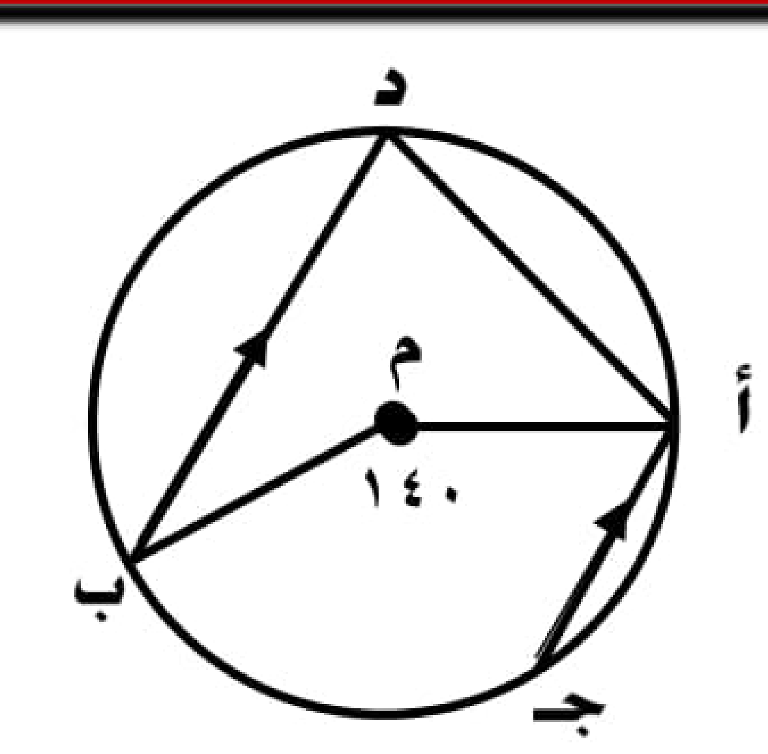
أوجد ق (أ جـ)



٤) أ جـ // د ب

ق(أ م ب) = ١٤٠°

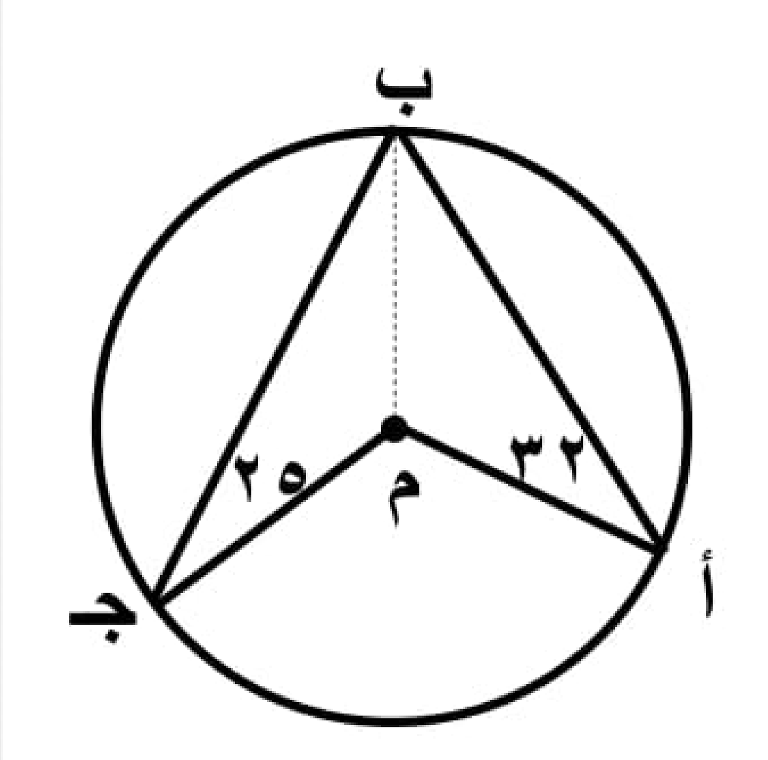
أوجد ق (جـ أ د)



٢) ق (أ) = ٣٢°

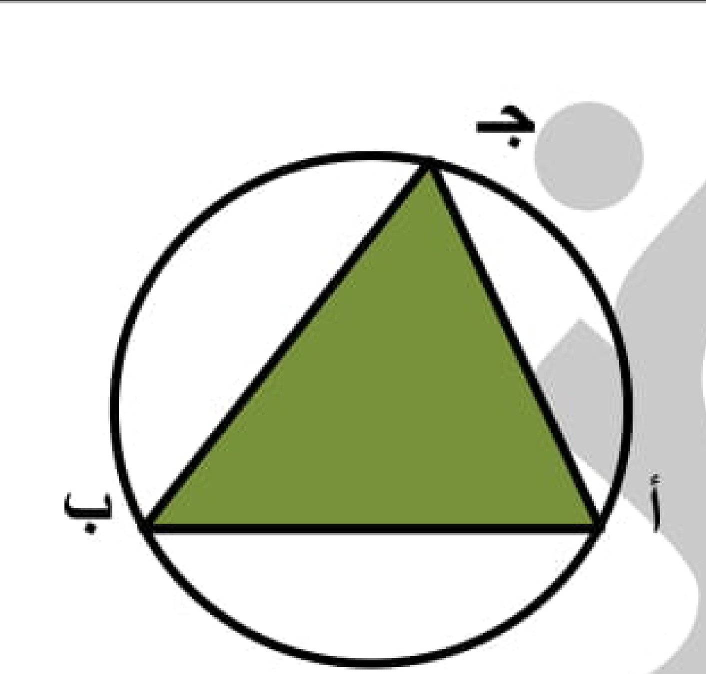
ق (جـ) = ٢٥°

أوجد : ق (أ م جـ)



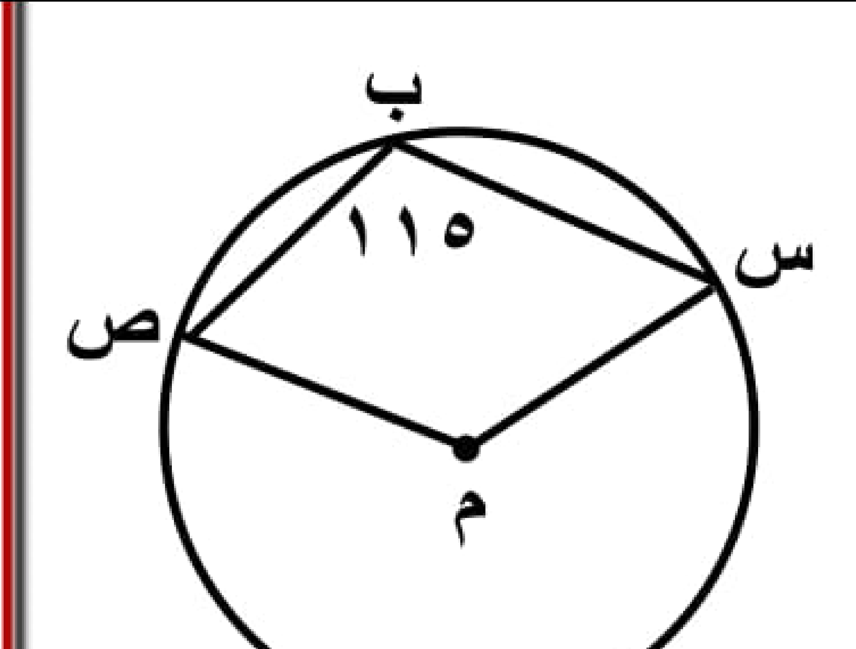
٥) ق(أ ب) : ق(ب جـ) : ق (أ جـ) = ٤ : ٥ : ٣

أوجد: ق(أ جـ ب)



٣) ق (ب) = ١١٥°

أوجد : ق (س م ص)

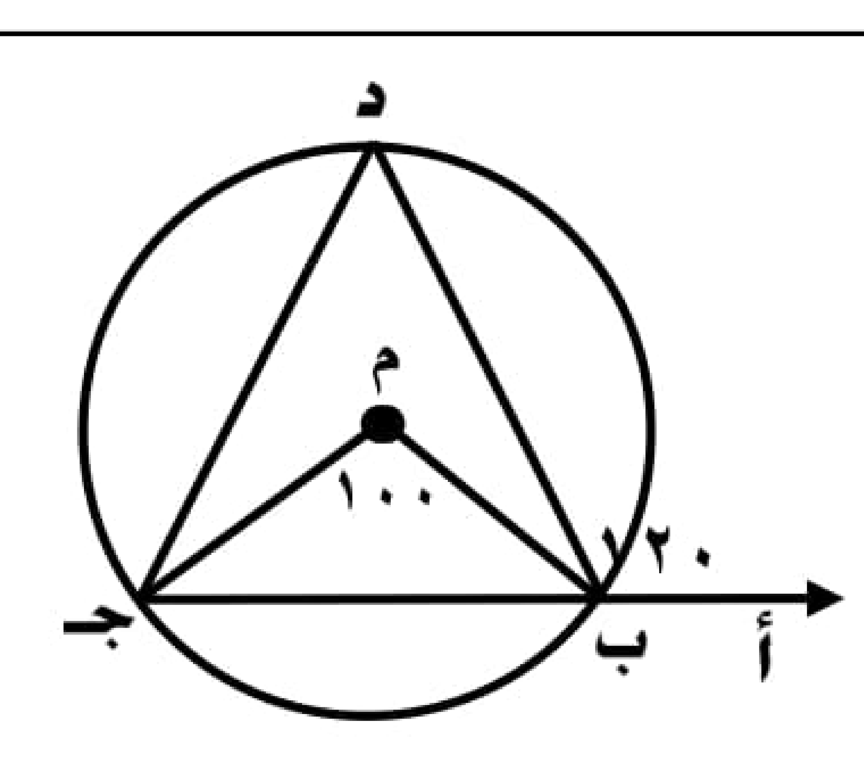


خد بالك : ب محيطية تشترك معها في القوس زاوية مركزية وهى م المنعكسة

٦) ق (ب م جـ) = ١٠٠°

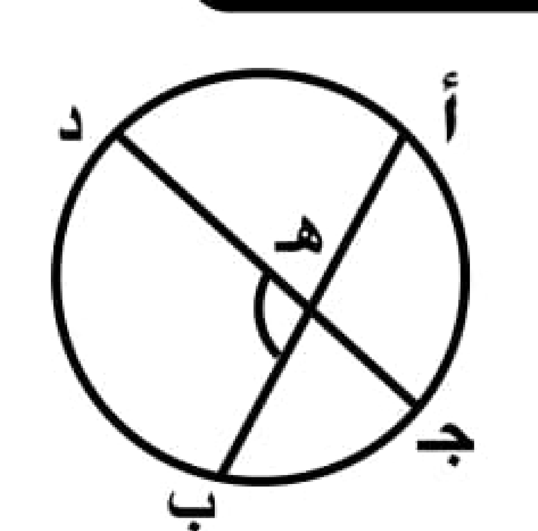
ق (أ ب د) = ١٢٠°

أوجد ق (د جـ ب)



تمرين مشهور ١

لو تقاطع وتران **داخل** دائرة



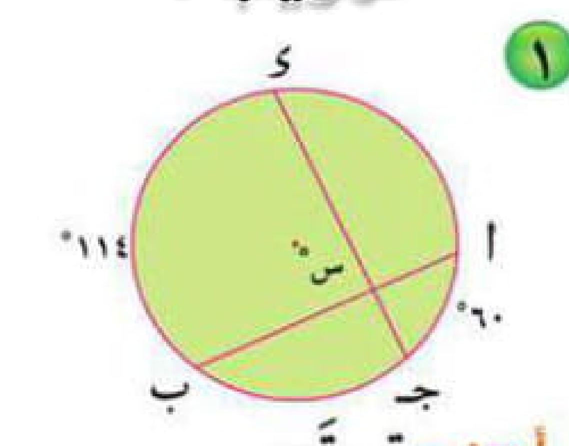
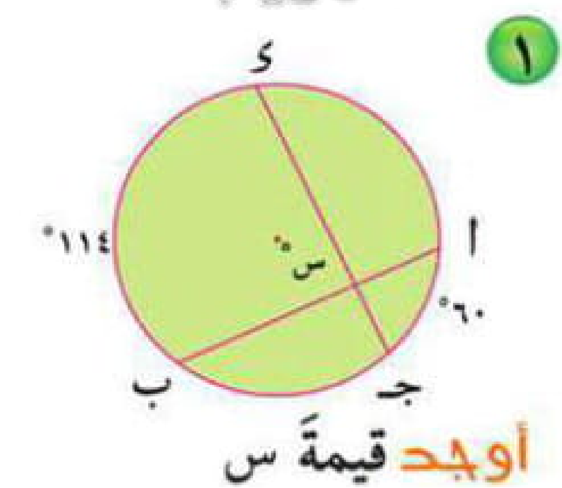
قياس زاوية التقاطع = نصف المجموع

ق (د $\hat{هـ}$ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أ جـ) + ق (⌒د ب)]

قياس القوس المجهول = ضعف الزاوية ـ المعلوم

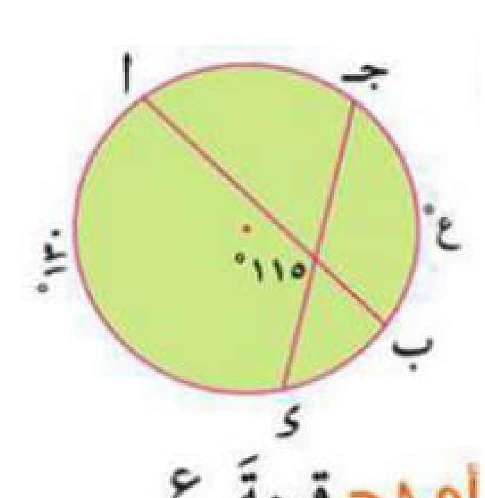
ق (⌒أ جـ) = ٢ ق(د $\hat{هـ}$ ب) – ق (⌒د ب)

تدريب 1

أوجد قيمة س

تدريب 2



أوجد قيمة ع

مثال ١

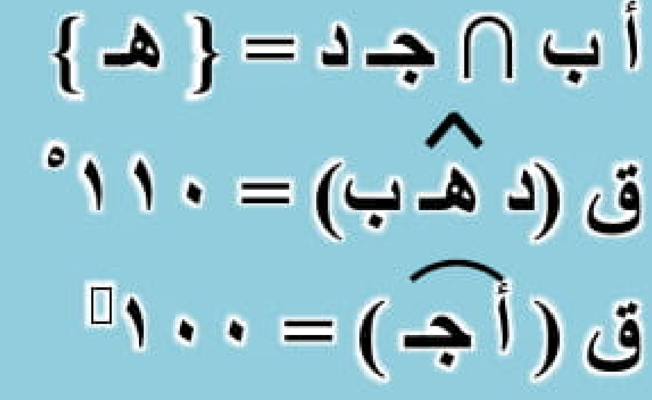
في الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ∩ $\overline{جـ د}$ = { هـ }

ق (د $\hat{هـ}$ ب) = ١١٠°

ق (⌒أ جـ) = ١٠٠°

أوجد ق (د $\hat{جـ}$ ب)



الحل

من تمرين مشهور ١ :

ق (⌒د ب) = ٢ ق (د $\hat{هـ}$ ب) – ق (⌒أ جـ)

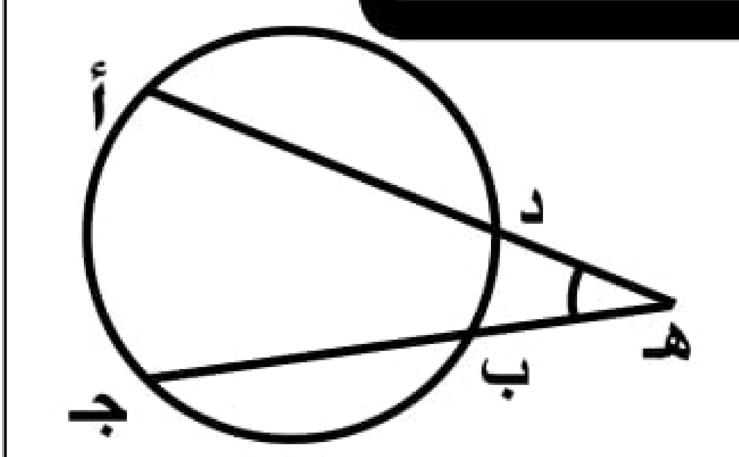
= ٢ × ١١٠ – ١٠٠ = ١٢٠°

∵ ق (د $\hat{جـ}$ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (⌒د ب)

∴ ق (د $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠°

تمرين مشهور ٢

لو تقاطع وتران **خارج** دائرة



قياس زاوية التقاطع = نصف الطرح

ق ($\hat{هـ}$) = $\frac{١}{٢}$ [ق (⌒أ جـ) – ق (⌒د ب)]

قياس القوس الأكبر = ضعف الزاوية + الأصغر

ق (⌒أ جـ) = ٢ ق($\hat{هـ}$) + ق (⌒د ب)

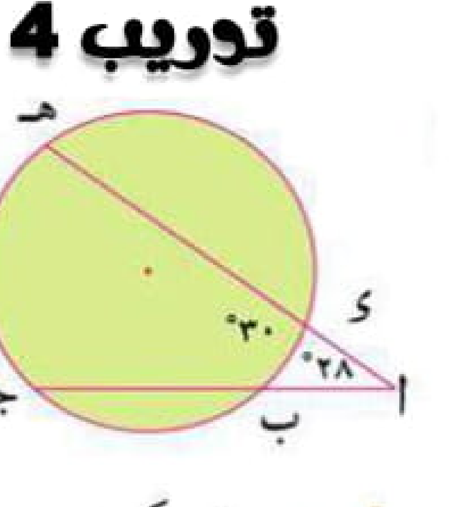
قياس القوس الأصغر = الأكبر ـ ضعف الزاوية

ق (⌒د ب) = ق (⌒أ جـ) – ٢ ق(هـ)

تدريب 3

أوجد قيمة س

تدريب 4



أوجد قيمة ص

مثال ٢

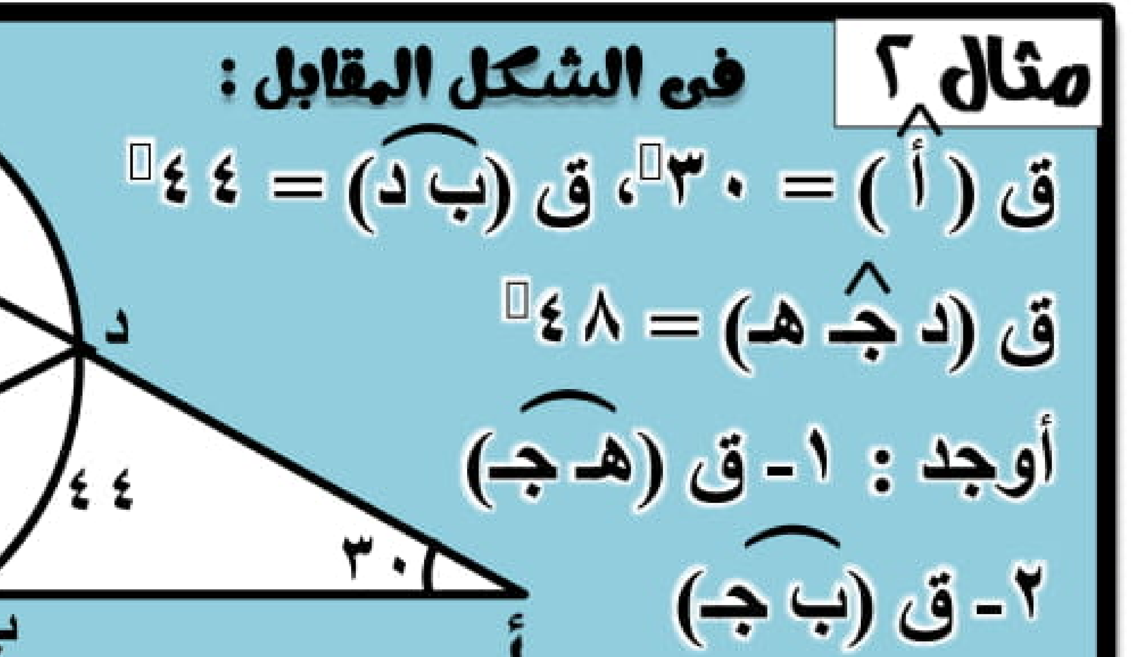
في الشكل المقابل :

ق ($\hat{أ}$) = ٣٠° ، ق (⌒ب د) = ٤٤°

ق (د $\hat{جـ}$ هـ) = ٤٨°

أوجد : ١- ق (⌒هـ جـ)

٢- ق (⌒ب جـ)



الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق(⌒هـ جـ) = ٢ ق($\hat{أ}$) + ق (⌒د ب)

∴ ق (⌒هـ جـ) = ٢ × ٣٠ + ٤٤ = ١٠٤° **أولا**

∵ ق (د $\hat{جـ}$ هـ) المحيطية = ٤٨°

∴ ق(⌒د هـ) = ٤٨ × ٢ = ٩٦°

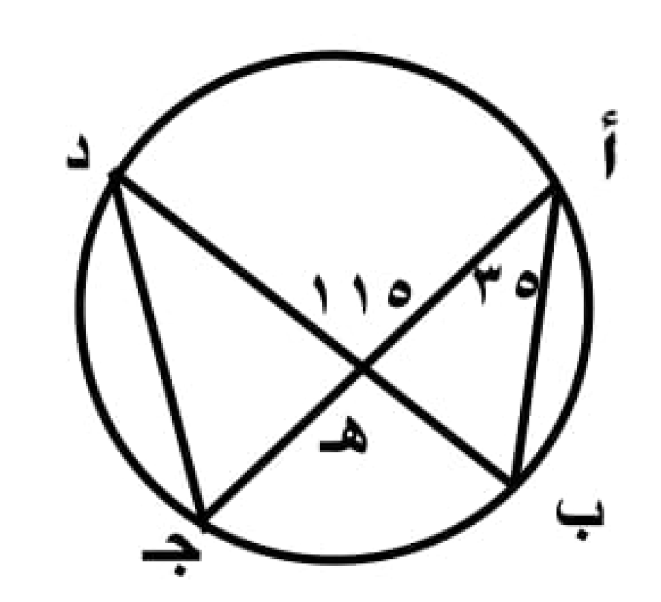
∵ قياس الدائرة = ٣٦٠

∴ ق (⌒ب جـ) = ٣٦٠ – (٤٤ + ١٠٤ + ٩٦) = ١١٦°

3 تمارين

٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩

١ في الشكل المقابل :



ق (أ^) = ٣٥°

ق (أ هـ^ د) = ١١٥°

أوجد : ق (⌒أ د)

الحل

٢ في الشكل المقابل :

ق (أ^) = ٤٠° ق(⌒ب د)=٣٢

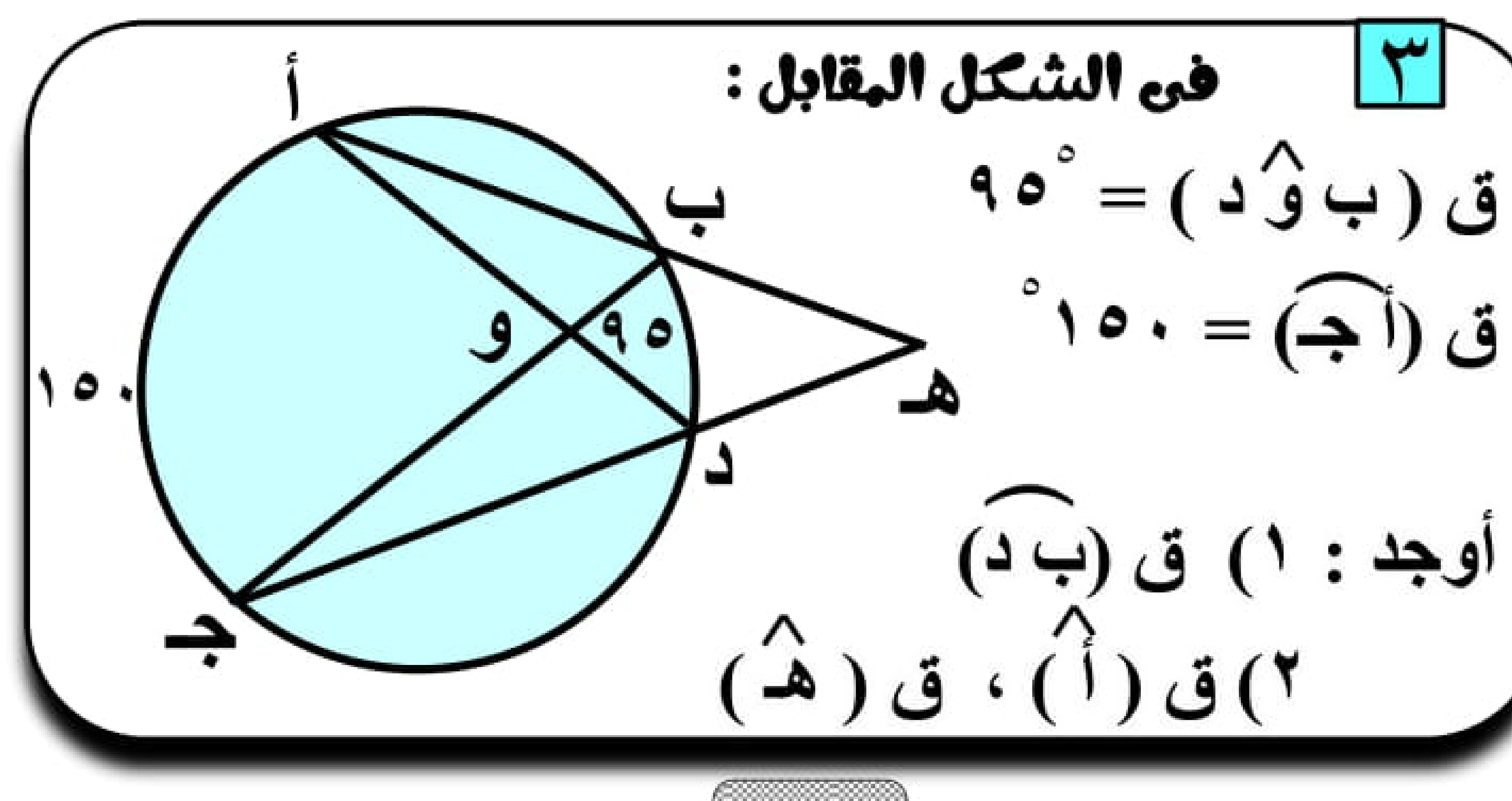
ق (⌒ب جـ) = ق (⌒د هـ)

أوجد : ١) ق (⌒جـ هـ)

٢) ق (⌒ب جـ)

الحل

٣ في الشكل المقابل :



ق (ب و^ د) = ٩٥°

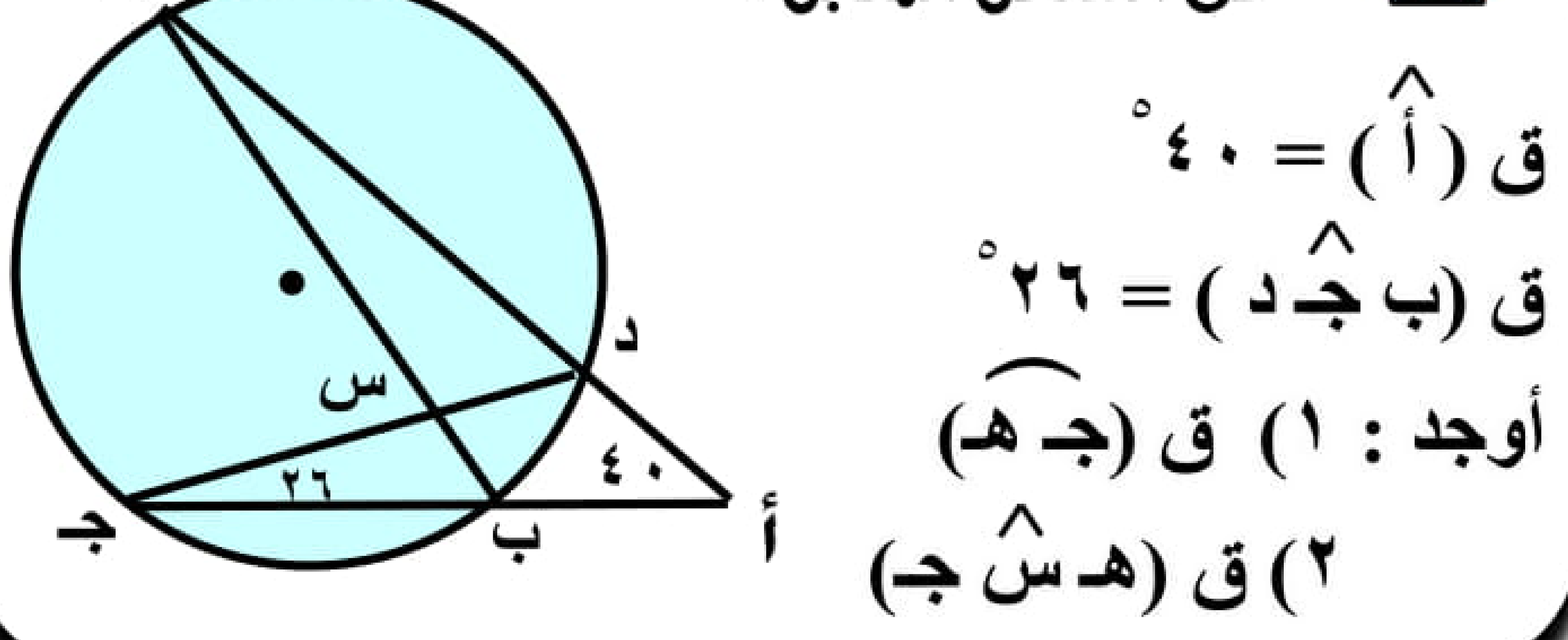
ق (⌒أ جـ) = ١٥٠°

أوجد : ١) ق (⌒ب د)

٢) ق (أ^) ، ق (هـ^)

الحل

٤ في الشكل المقابل :



ق (أ^) = ٤٠°

ق (ب جـ^ د) = ٢٦°

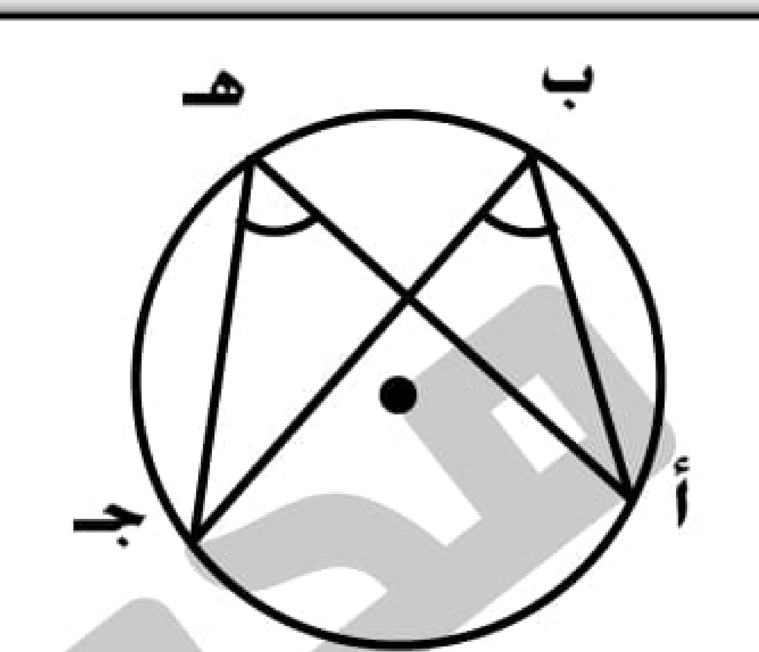
أوجد : ١) ق (⌒جـ هـ)

٢) ق (هـ س^ جـ)

الحل

4 الدرس الرابع: الزوايا المحيطية المشتركة في القوس

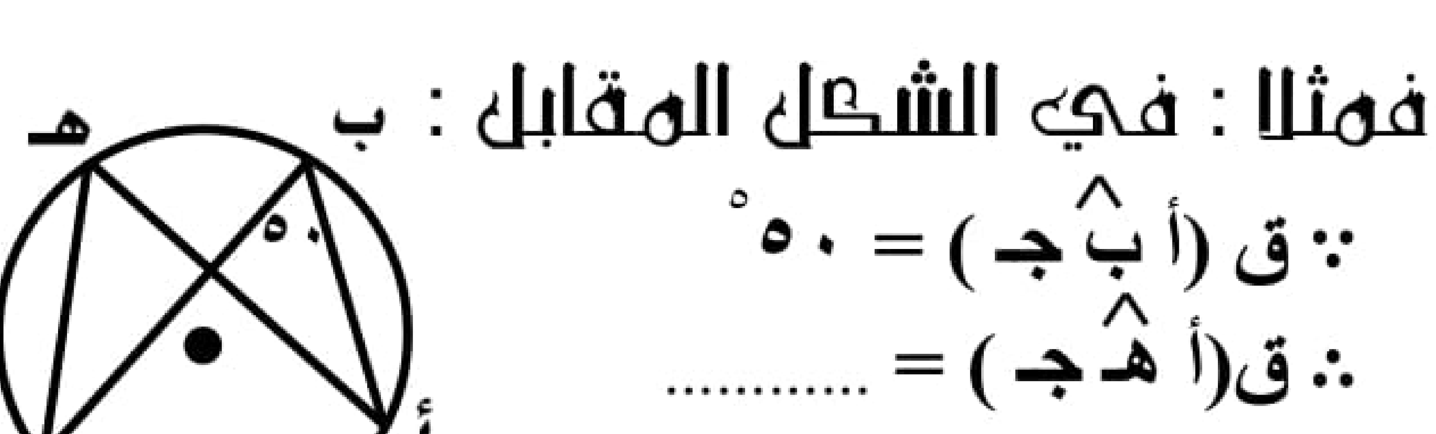
الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متساوية في القياس



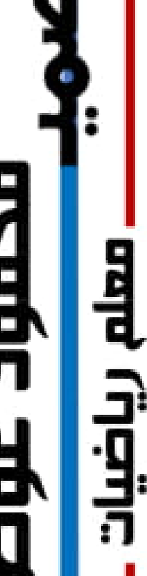
ق (ب̂) = ق (هـ̂)
محيطيتان مشتركتان فى القوس أ جـ

كذلك: ق (أ̂) = ق (جـ̂)
محيطيتان مشتركتان فى القوس ب هـ

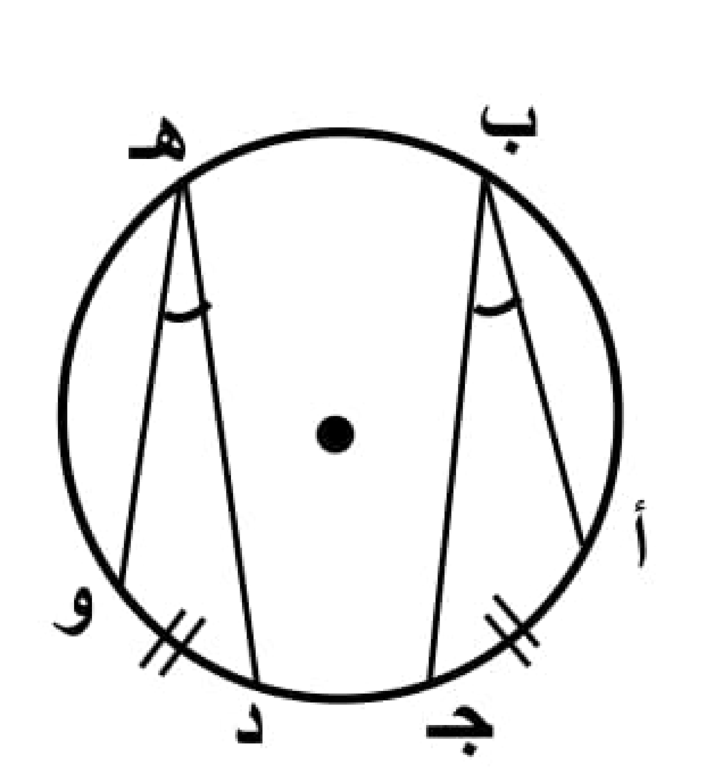
فمثلا : في الشكل المقابل :



∵ ق (أ ب̂ جـ) = ٥٠°
∴ ق(أ هـ̂ جـ) = ...
السبب: ....

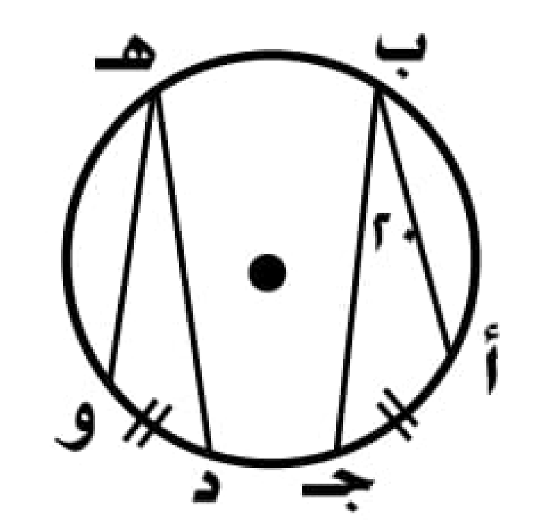


الزوايا المحيطية التي أقواسها متساوية تكون متساوية في القياس

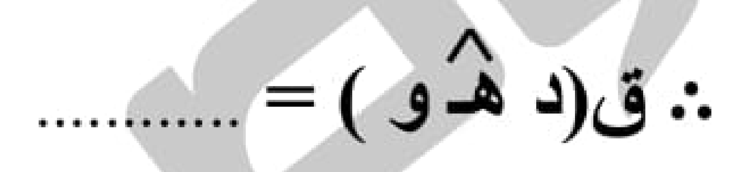


∵ ق (أجـ⌒) = ق (د و⌒)
∴ ق (ب̂) = ق (هـ̂)
(والعكس صحيح)

فمثلا : في الشكل المقابل :



∵ ق (أ ب̂ جـ) = ٢٠°
∴ ق(د هـ̂ و) = ...



السبب: ....

مثال ١

فى الشكل المقابل : أ ب ، جـ د وتران متساويان فى الطول

اثبت أن : △ أ جـ هـ متساوى الساقين

الحل

∵ أ ب = جـ د ∴ ق (أ ب⌒) = ق(جـ د⌒)

بطرح ق (د ب⌒) من الطرفين

∴ ق (أ د⌒) = ق (ب جـ⌒)

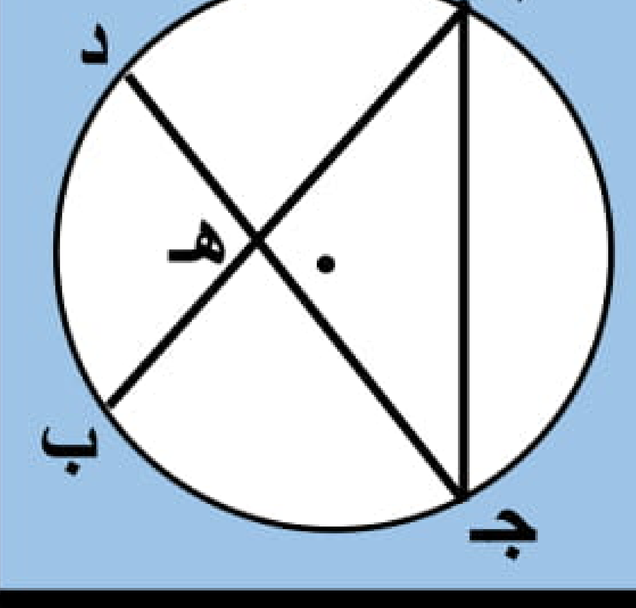
∴ ق (جـ̂) = ق (أ̂)

∴ △ أ جـ هـ متساوى الساقين

مثال ٢

فى الشكل المقابل : أ ب = أ جـ ، هـ ∈ ب جـ⌒

اثبت أن : ق (أ هـ̂ ب) = ق (أ هـ̂ جـ)



الحل

∵ أ ب = أ جـ أوتار متساوية

∴ ق (أ ب⌒) = ق (أ جـ⌒) أقواس متساوية

∴ ق (أ هـ̂ ب) = ق (أ هـ̂ جـ) هـ ط ث

القاعدة الأولى: إذا كانت الأوتار متساوية فإن الأقواس متساوية

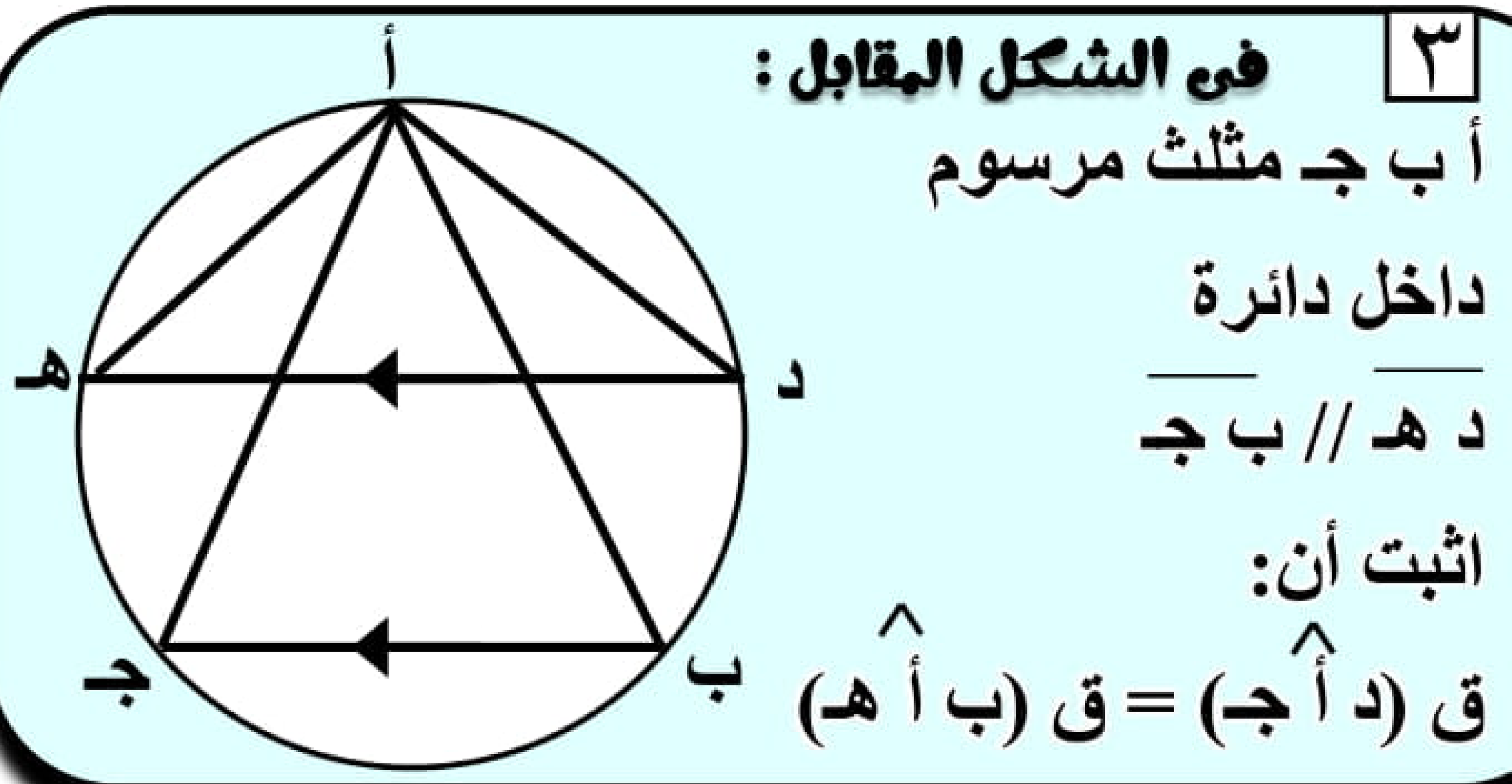
القاعدة الثانية: إذا كانت الأقواس متساوية فإن الزوايا المحيطية المرسومة عليها متساوية

[٣] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

د هـ // ب جـ

اثبت أن: ق (د أ جـ) = ق (ب أ هـ)



الحل

∵ د هـ // ب جـ ∴ ق (د ب) = ق (هـ جـ)

∴ ق(د أ ب) المحيطية = ق (هـ أ جـ) المحيطية

لأنهما محيطيتان أقواسهما متساوية

وبإضافة ق (ب أ جـ) للطرفين

∴ ق (د أ جـ) = ق (ب أ هـ) هـ ط ث

[٤] فى الشكل المقابل :

أ ب ∩ جـ د = { هـ }

هـ أ = هـ د

اثبت أن : هـ ب = هـ جـ

الحل

∵ هـ أ = هـ د ∴ ق (أ) = ق (د)

، ∵ ق(أ) = ق (جـ) محيطيتان مشتركتان في د ب

، ق (د) = ق (ب) محيطيتان مشتركتان في أ جـ

∴ ق (جـ) = ق (ب)

∴ Δ هـ جـ ب متساوى الساقين ∴ هـ ب = هـ جـ

[٥] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

أ د = د هـ

اثبت أن :

Δ أ د هـ متساوى الأضلاع

الحل

∵ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ ق(ب) = ٦٠°

∴ ق(د) = ق (ب) = ٦٠° محيطيتان مشتركتان في أ جـ

∵ Δ أ د هـ متساوى الساقين

∴ ق (د أ هـ) = ق (د هـ أ) = ٦٠°

∴ Δ أ د هـ متساوى الأضلاع

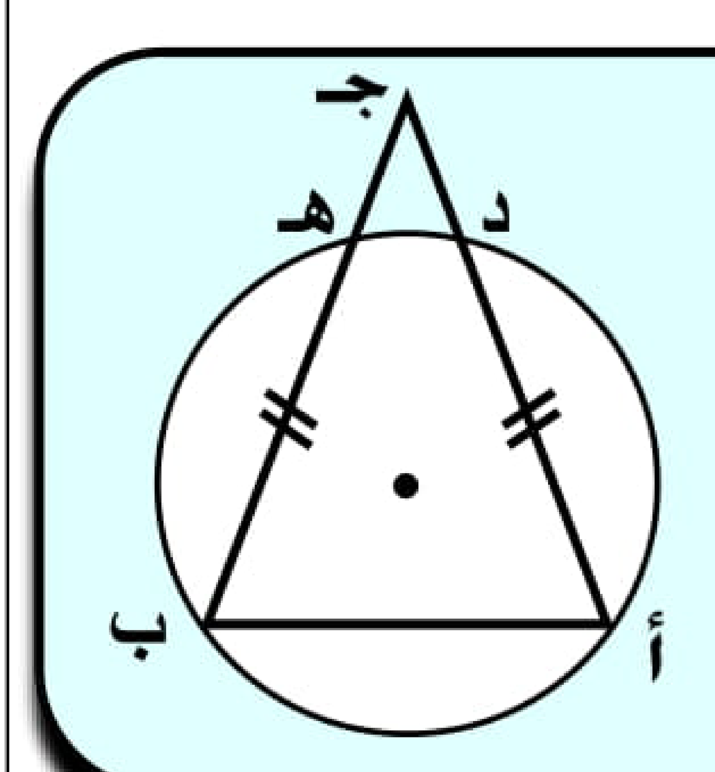
هـ ط ث

[٦] فى الشكل المقابل :

أ د ، ب هـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة

أ د ∩ ب هـ = { جـ }

اثبت أن : جـ د = جـ هـ



الحل

∵ أ د = ب هـ ∴ ق (أ د) = ق (ب هـ)

و بإضافة ق (د هـ) للطرفين

∴ ق (أ هـ) = ق (ب د)

∴ ق (ب) = ق (أ) ∴ جـ أ = جـ ب

فى Δ جـ أ ب :

∵ جـ أ = جـ ب ، د أ = هـ ب

بالطرح ينتج أن : جـ د = جـ هـ

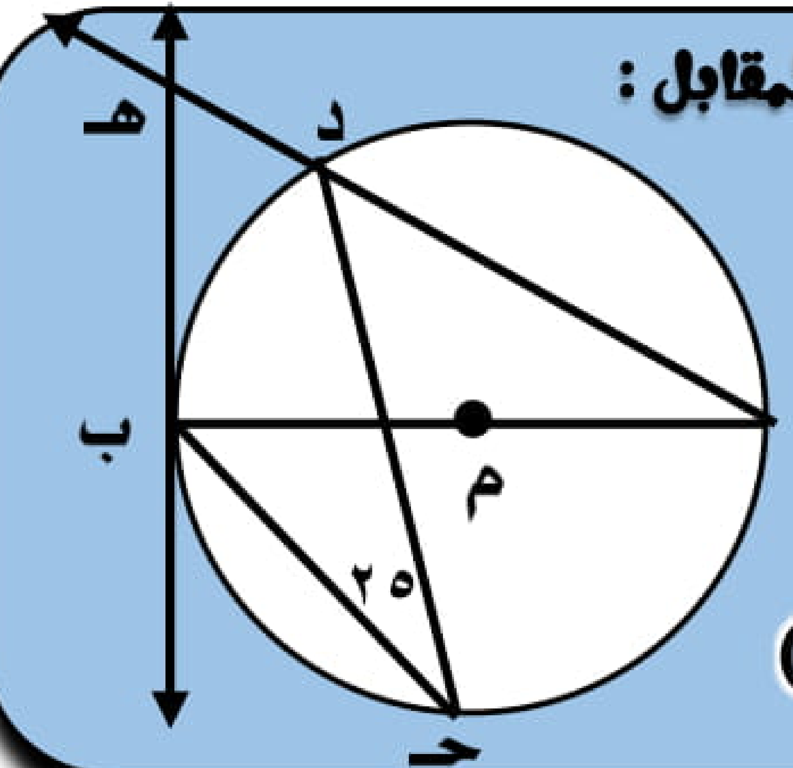
٥ في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ب هـ مماس للدائرة

ق (ب جـ د) = ٢٥°

أوجد بالبرهان ق (أ هـ ب)



الحل

∵ ب هـ مماس ، أ ب قطر

∴ ق (هـ ب أ) = ٩٠°

∵ ق (أ) = ق (جـ) محيطيتان مشتركتان في د ب

∴ ق (أ) = ٢٥°



في Δ هـ ب أ :

ق (أ هـ ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°

٦

ق (أ) = ٤٣°

ق (جـ) = ٢٠°

أوجد: ق (أ ب هـ)

الحل

....

٧

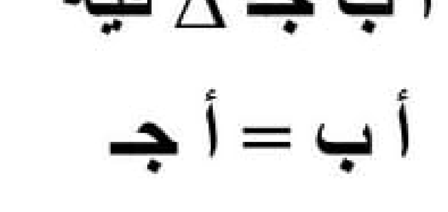
أ ب جـ Δ فيه

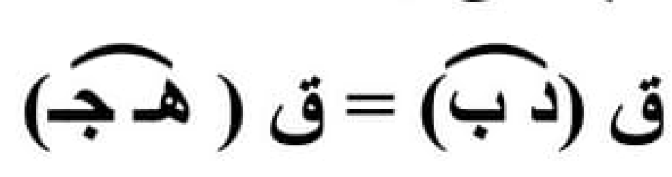
أ ب = أ جـ

اثبت أن :

ق (د ب) = ق (هـ جـ)







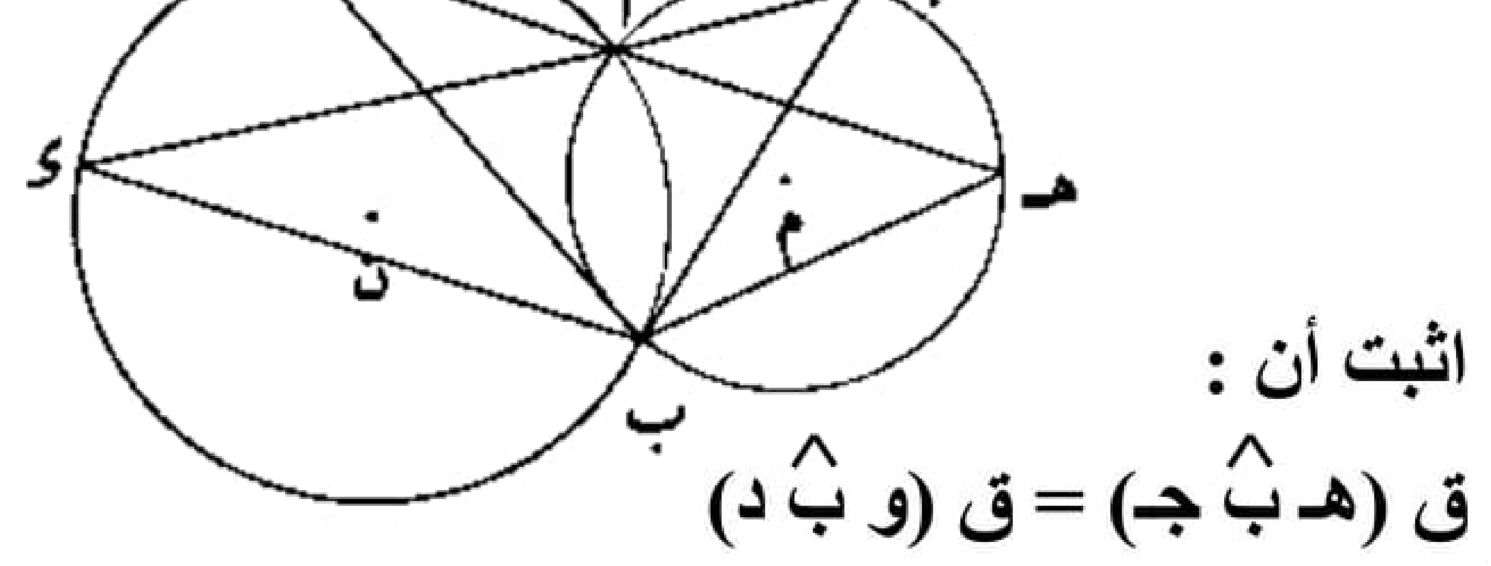
الحل

....

٨

اثبت أن :

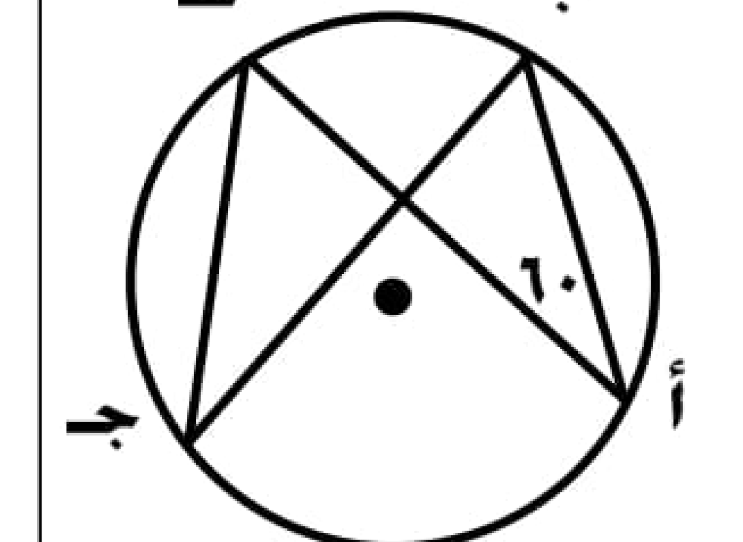
ق (هـ ب جـ) = ق (و ب د)



الحل

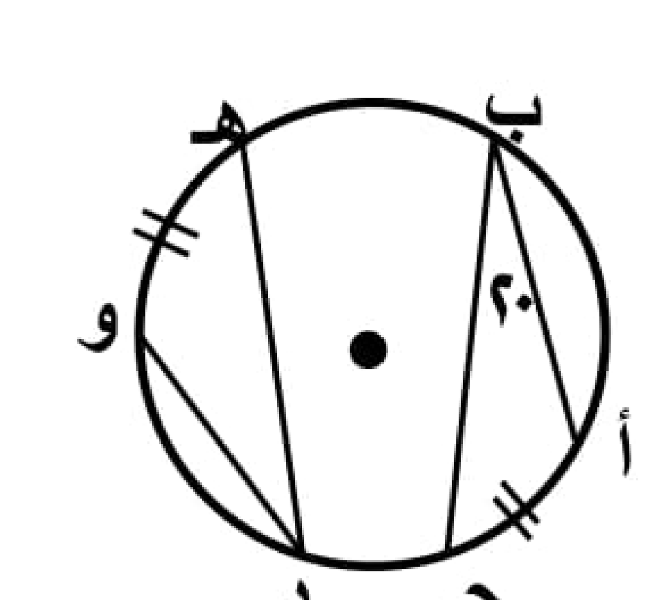
....

اختر الإجابة الصحيحة:



1 في الشكل المقابل: ق $(\hat{أ})$ = ٦٠ فإن ق $(\hat{جـ})$ = ...°

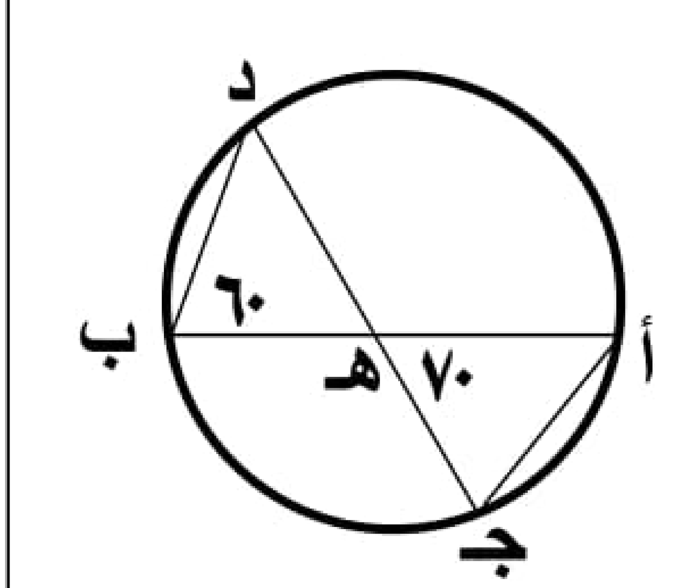
أ) ٣٠　　ب) ٦٠　　جـ) ٩٠　　د) ١٢٠



2 في الشكل المقابل: ق $(\overset{\frown}{أ جـ})$ = ق $(\overset{\frown}{هـ و})$ فإن ق $(\hat{د})$ = ...



أ) ٢٠　　ب) ١٠　　جـ) ٤٠　　د) ٨٠



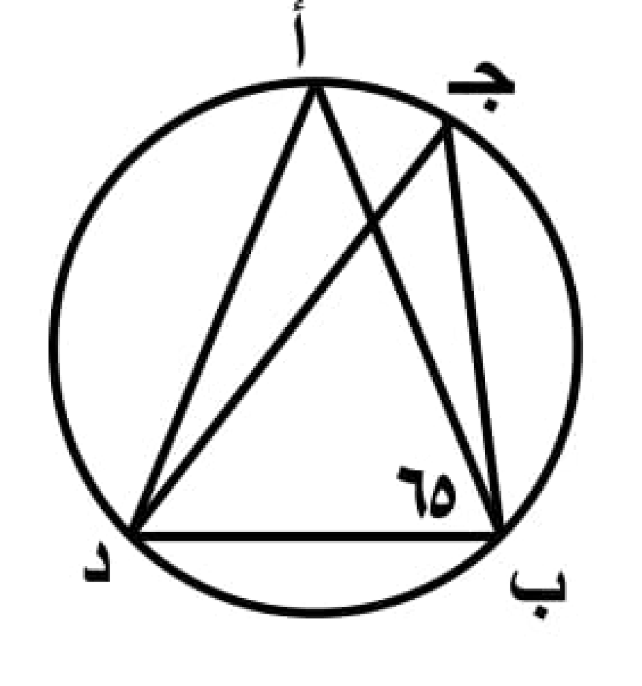
3 في الشكل المقابل: ق $(\hat{ب})$ = ٦٠°، ق (أ $\hat{هـ}$ جـ) = ٧٠ فإن ق $(\hat{أ})$ = ...°





أ) ٥٠　　ب) ٦٠　　جـ) ٧٠　　د) ٨٠





4 في الشكل المقابل: أ ب = أ د ، ق (أ $\hat{ب}$ د) = ٦٥ فإن ق $(\hat{جـ})$ = ...°

أ) ١٥　　ب) ٢٥　　جـ) ٣٠　　د) ٥٠

---

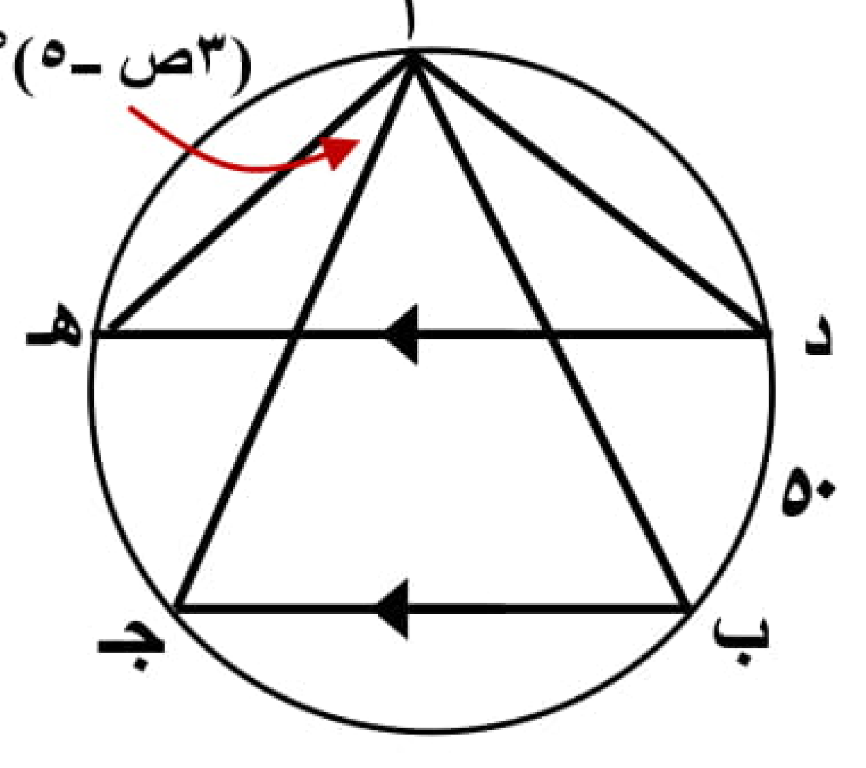
١ في الشكل المقابل:

$\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

ق $(\overset{\frown}{د ب})$ = ٥٠°

ق (جـ $\hat{أ}$ هـ) = ٣ص ـ ٥

أوجد قيمة ص



٢ في الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة م

ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٤٠

ق $(\overset{\frown}{أ د})$ = ق $(\overset{\frown}{د جـ})$

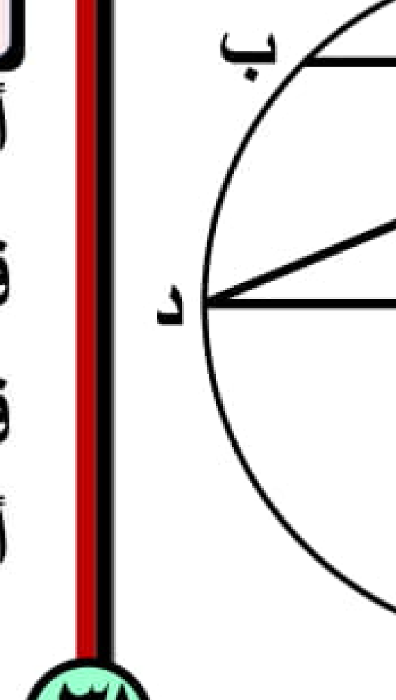
أوجد ق (د $\hat{أ}$ ب)

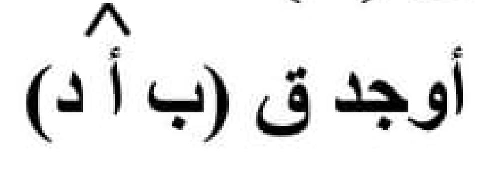
٣ في الشكل المقابل:

أ ب ، جـ د وتران متوازيان

ق $(\hat{هـ})$ = ٢٥°

أوجد ق (ب $\hat{أ}$ د)





٤ في الشكل المقابل:

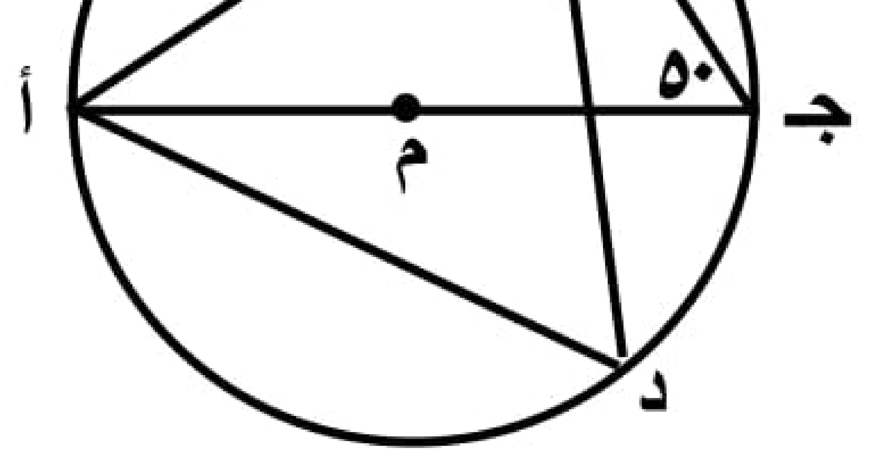
$\overline{أ جـ}$ قطر في الدائرة م

ق $(\hat{جـ})$ = ٥٠°

ق(أ $\hat{ب}$ د) = ٦٠°

أوجد: ١) ق (جـ $\hat{ب}$ د)

٢) ق (ب $\hat{أ}$ د)



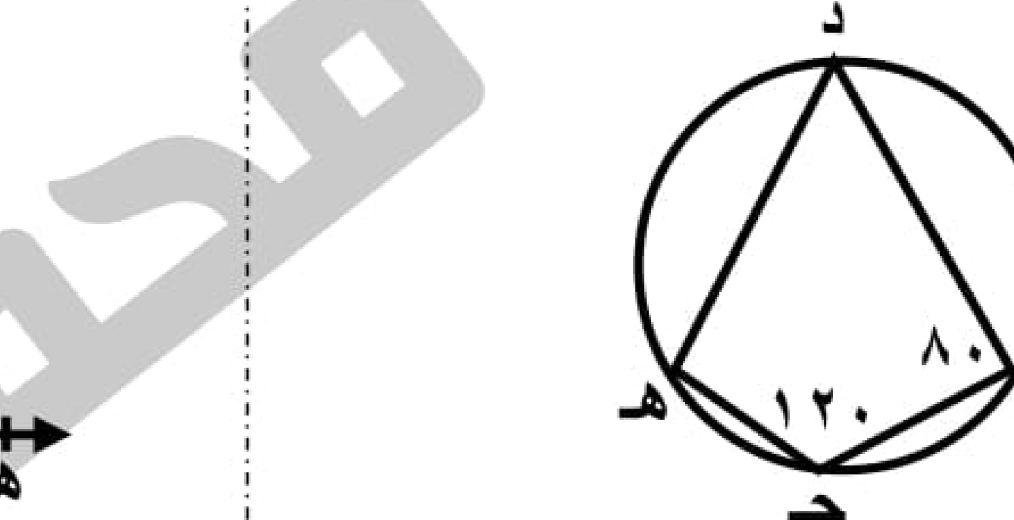
الدرس الخامس 5 الشكل الرباعى الدائرى

الشكل الرباعى الدائرى : هو شكل رباعى تنتمى رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة .

أي يمكن رسم دائرة واحدة تمر برؤوسه الأربعة

لو عرفت ان الشكل رباعى دائرى (سواء هو قالك فى المسألة أو لقيت رؤوسه الأربعة تقع على الدائرة) استنتج ٣ حاجات :

كل زاويتان متقابلتان مجموعهما = ١٨٠°



∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

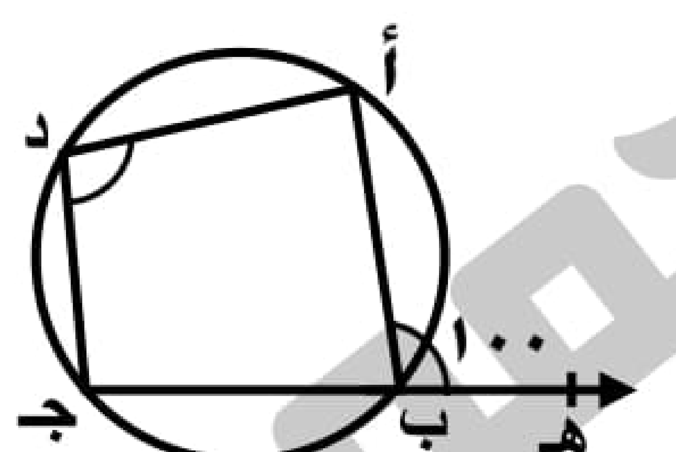
∴ ق ($\hat{ب}$) + ق ($\hat{هـ}$) = ١٨٠°

، ق ($\hat{د}$) + ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠°

∴ ق ($\hat{د}$) = ١٨٠ ـ ١٢٠ = ٦٠°

ق ($\hat{هـ}$) = ١٨٠ ـ ٨٠ = ١٠٠°

قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

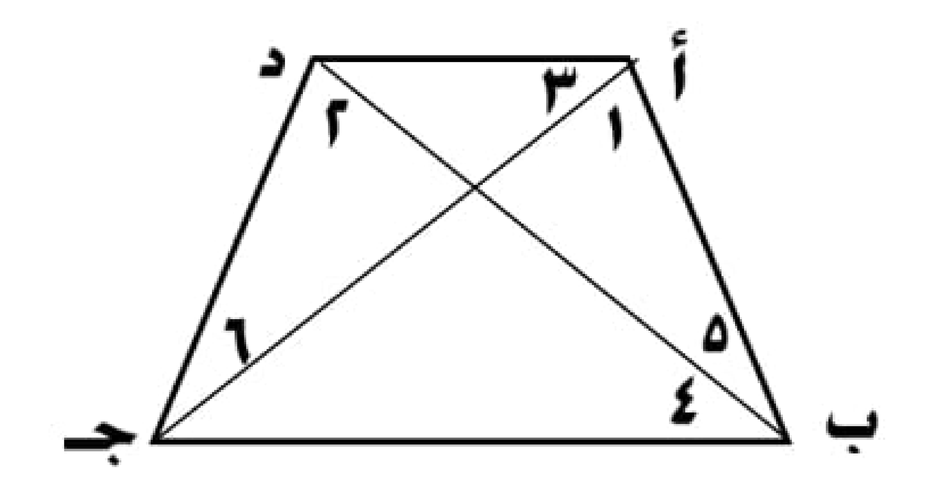


∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (أ $\hat{ب}$ هـ) الخارجة = ق ($\hat{د}$)

∴ ق ($\hat{د}$) = ١٠٠°

أي زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان



إذا كان أ ب جـ د رباعى دائرىفإن:

ق($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) مرسومتان على ب جـ

ق($\hat{٣}$) = ق ($\hat{٤}$) مرسومتان على د جـ

ق($\hat{٥}$) = ق ($\hat{٦}$) مرسومتان على أ د

مثال ١ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، ق ($\hat{جـ}$) = ٧٠°،
ق (أ $\hat{د}$ ب) = ٣٠°

أوجد : ق (أ $\hat{ب}$ د)

الحل

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى

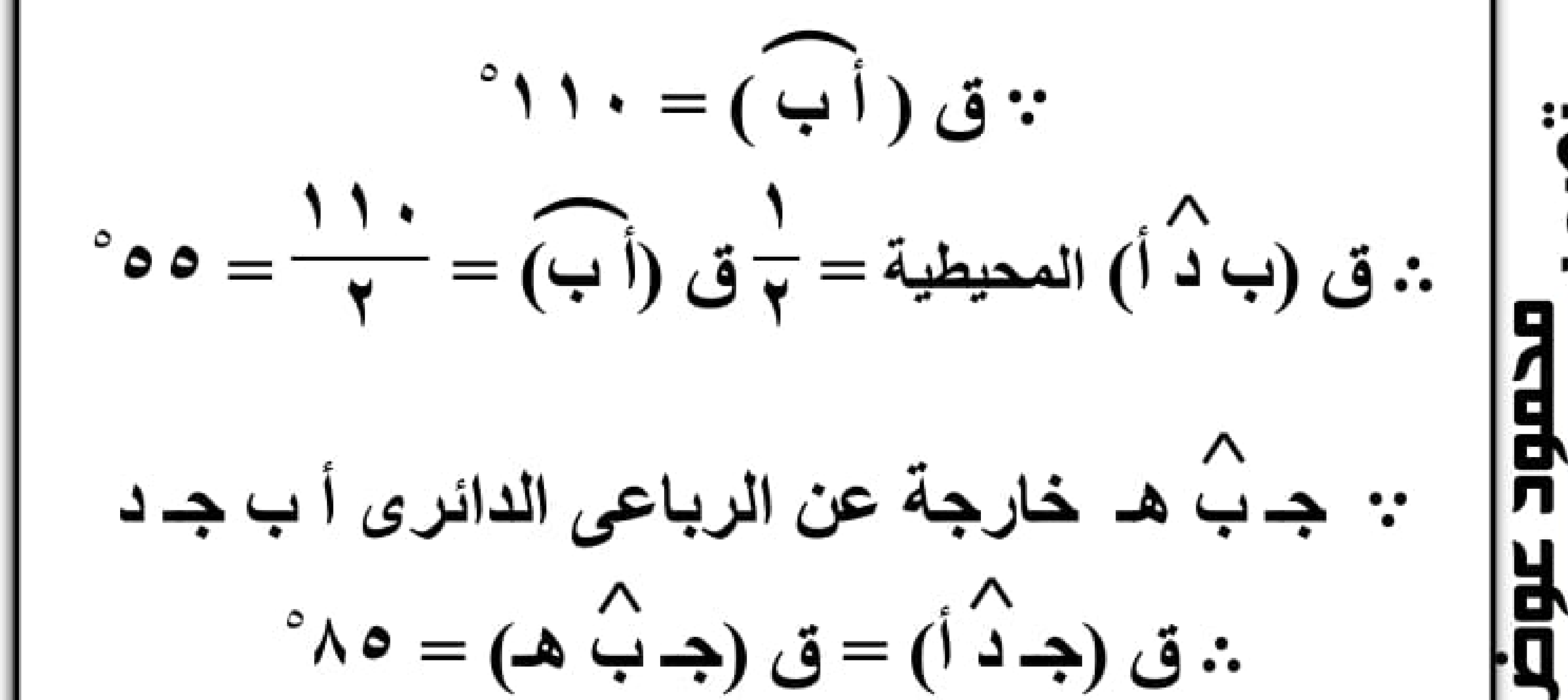
∴ ق ($\hat{أ}$) + ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠°

∴ ق ($\hat{أ}$) = ١٨٠ ـ ٧٠ = ١١٠°

في Δ أ ب د :

ق (أ $\hat{ب}$ د) = ١٨٠ ـ (١١٠ + ٣٠) = ٤٠°

مثال ٢ فى الشكل المقابل :



هـ ∈ أ ب

ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١١٠°

ق (جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد ق (ب $\hat{د}$ جـ)

الحل

∵ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ١١٠°

∴ ق (ب $\hat{د}$ أ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = $\frac{١١٠}{٢}$ = ٥٥°

∵ جـ $\hat{ب}$ هـ خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ د

∴ ق (جـ $\hat{د}$ أ) = ق (جـ $\hat{ب}$ هـ) = ٨٥°

∴ ق (ب $\hat{د}$ جـ) = ق (جـ $\hat{د}$ أ) ـ ق (ب $\hat{د}$ أ)

= ٨٥ ـ ٥٥ = ٣٠°

٣ في الشكل المقابل :

ق (أ ب^ هـ) = ١٠٠°

ق (جـ أ^ د) = ٤٠°

اثبت أن :

ق (جـ د) = ق (أ د)

الحل

∵ أ ب^ هـ زاوية خارجة عن الرباعى الدائرى أ ب جـ د

∴ ق (د^) = ق (أ ب^ هـ) = ١٠٠°

في Δ أ د جـ :

ق (أ جـ^ د) = ١٨٠ – (١٠٠ + ٤٠) = ٤٠°

∵ ق(د أ^ جـ) = ق (أ جـ^ د) = ٤٠

∴ أ د = د جـ

∴ ق(جـ د) = ق (أ د)

هـ ط ث

٤ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م

جـ ب = جـ د

ق (ب جـ^ د) = ١٤٠°

أوجد: ١- ق (أ^) ٢- ق (د^)

الحل

العمل نرسم ب د

∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق (أ^) + ق (جـ^) = ١٨٠°

∴ ق (أ^) = ١٨٠ – ١٤٠ = ٤٠° **المطلوب الأول**

في Δ جـ ب د :

∵ جـ ب = جـ د ∴ ق(جـ د^ ب) = ق (جـ ب^ د)

∴ ق (جـ د^ ب) = $\frac{١٨٠ - ١٤٠}{٢}$ = ٢٠°

∵ ق (أ د^ ب) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق (د^) = ٢٠ + ٩٠ = ١١٠°

تدريبات

٥ في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ق (أ جـ^ د) = ١١٥°

أوجد بالبرهان : ق (د أ^ ب)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

٦ في الشكل المقابل :

أ ب قطر في الدائرة م

ق (د أ^ هـ) = ١٠٠°

جـ د = جـ ب

أوجد بالخطوات : ق (أ د^ جـ)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

إعداد أ/ محمود عوض

٠١٢٠٢٥٦٠٢٣٩





اختر الإجابة الصحيحة:

1 الشكل الرباعى الدائرى في الأشكال التالية هو ....

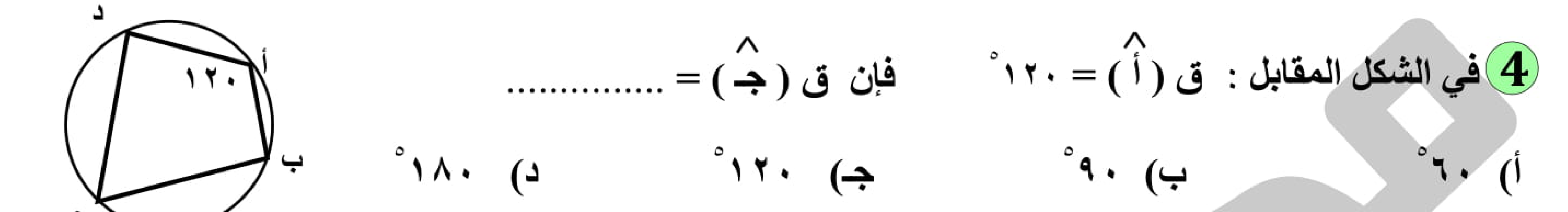
أ) المعين ب) المستطيل جـ) متوازى الأضلاع د) شبه المنحرف

1 أ ب جـ د شكل رباعى دائرى فيه ق ($\hat{أ}$) = ٦٠° فإن ق ($\hat{جـ}$) = ...

أ) ٦٠° ب) ٣٠° جـ) ٩٠° د) ١٢٠°

3 إذا كان الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى وكان ق ($\hat{أ}$) = $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{جـ}$) فإن ق ($\hat{أ}$) = ...

أ) ٩٠° ب) ٦٠° جـ) ١٢٠° د) ١٨٠°



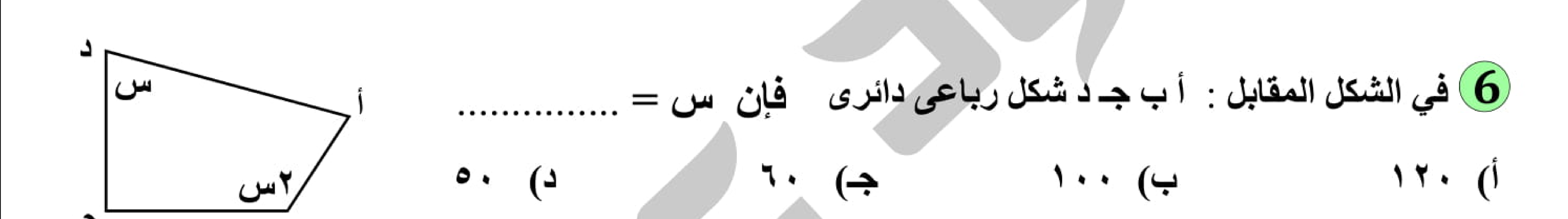
4 **في الشكل المقابل : ق ($\hat{أ}$) = ١٢٠° فإن ق ($\hat{جـ}$) = ...**

أ) ٦٠° ب) ٩٠° جـ) ١٢٠° د) ١٨٠°

5 **في الشكل المقابل : دائرة مركزها م**

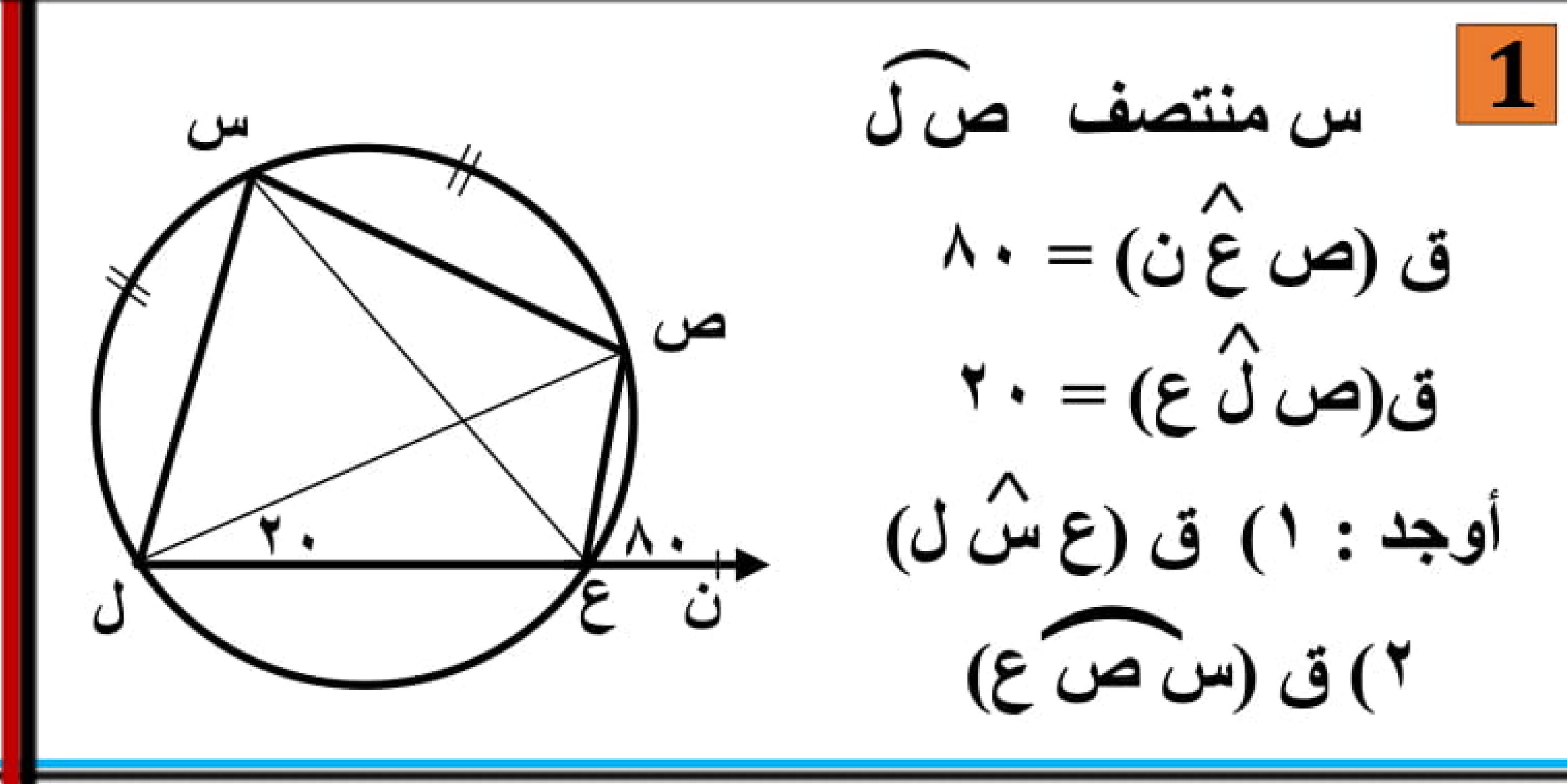
ق (ب $\hat{م}$ د) = ١١٠° فإن ق ($\hat{جـ}$) = ...

أ) ٧٠° ب) ١١٠° جـ) ١٢٥° د) ٥٥°



6 **في الشكل المقابل : أ ب جـ د شكل رباعى دائرى فإن س = ...**

أ) ١٢٠ ب) ١٠٠ جـ) ٦٠ د) ٥٠



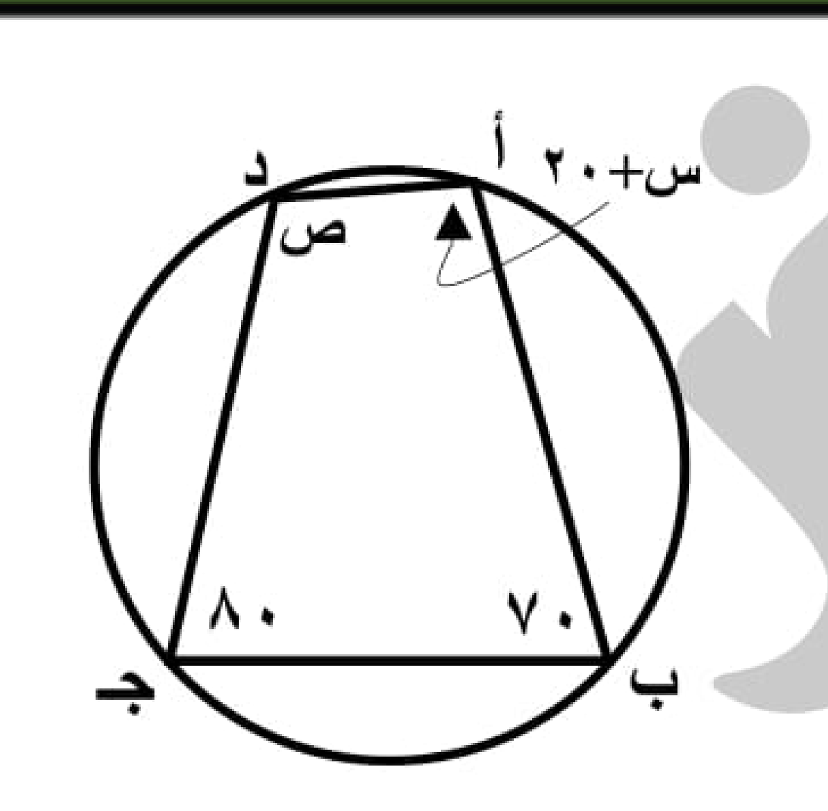
1 س منتصف $\overset{\frown}{ص ل}$

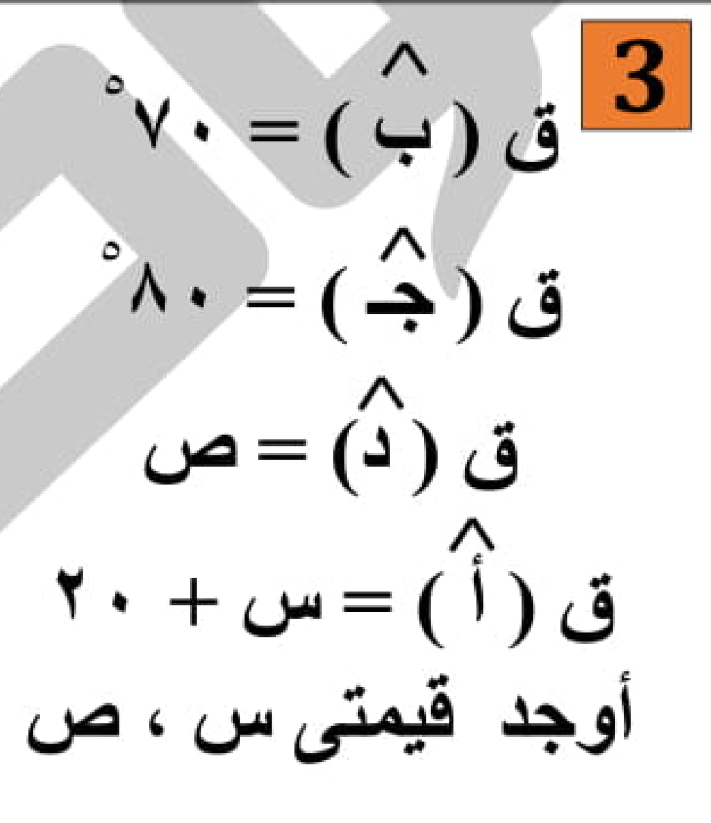
ق (ص $\hat{ع}$ ن) = ٨٠

ق(ص $\hat{ل}$ ع) = ٢٠

أوجد : ١) ق (ع $\hat{س}$ ل)

٢) ق $\overset{\frown}{(س ص ع)}$





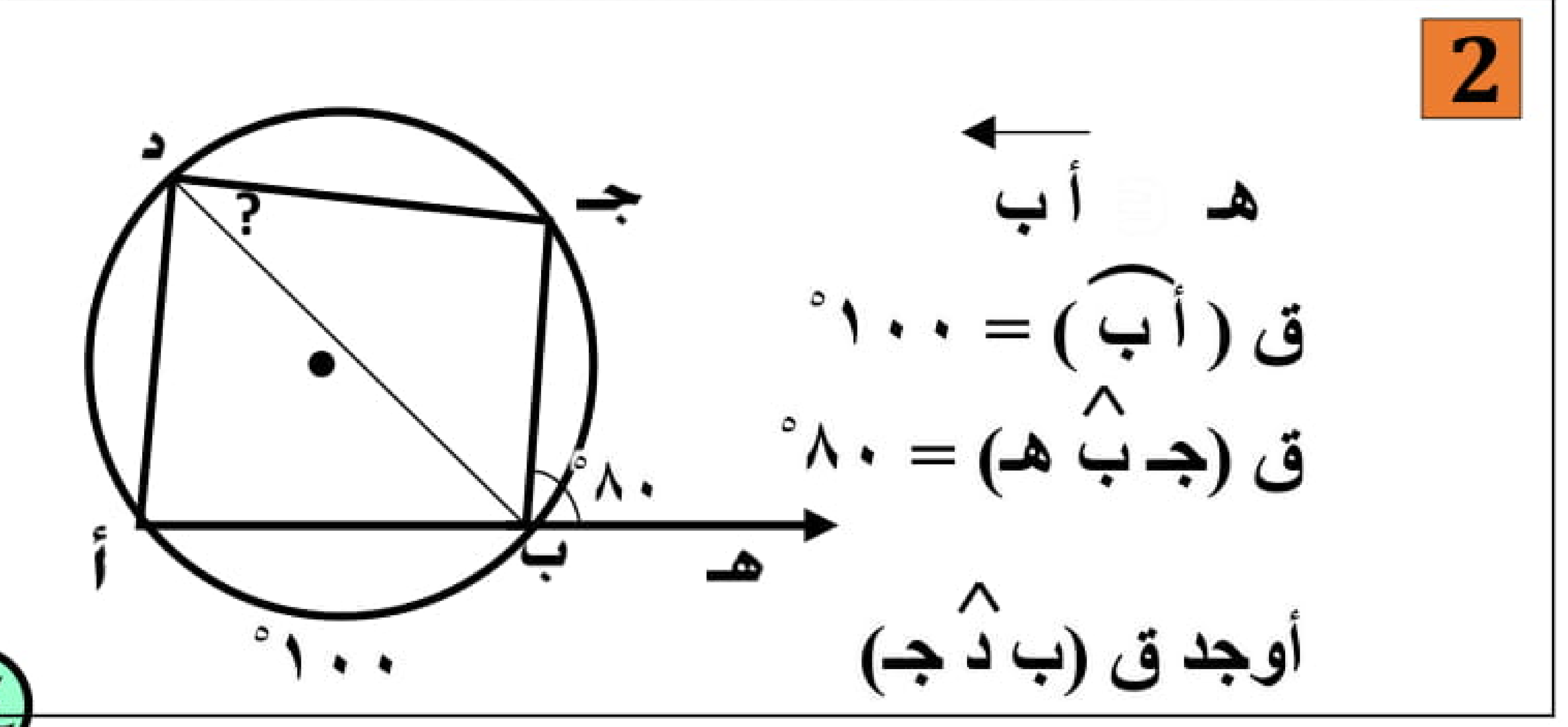
3 ق ($\hat{ب}$) = ٧٠°

ق ($\hat{جـ}$) = ٨٠°

ق ($\hat{د}$) = ص

ق ($\hat{أ}$) = س + ٢٠

أوجد قيمتى س ، ص

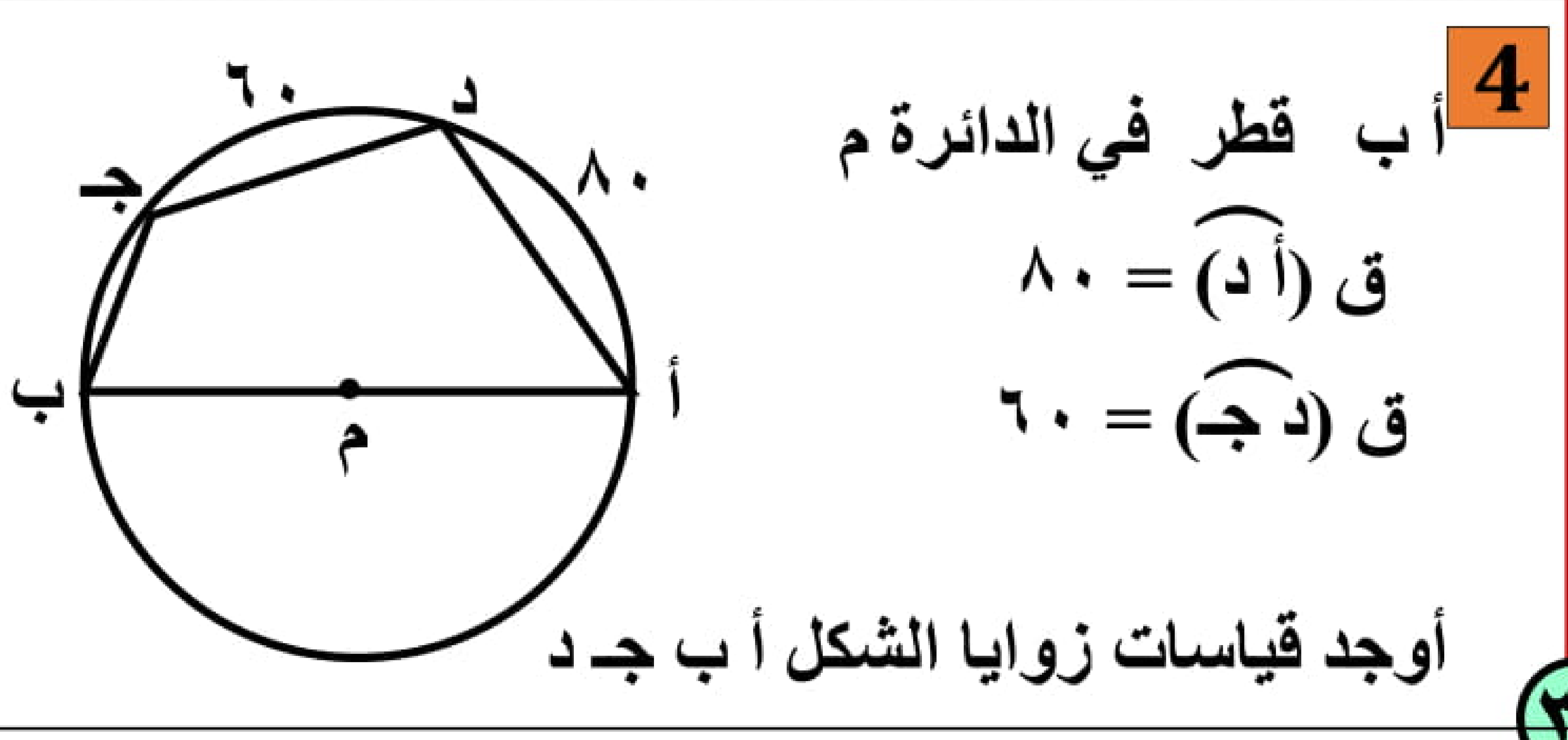


2 هـ ∈ $\overleftarrow{أ ب}$

ق $\overset{\frown}{(أ ب)}$ = ١٠٠°

ق (جـ $\hat{ب}$ هـ) = ٨٠°

أوجد ق (ب $\hat{د}$ جـ)



4 أ ب قطر في الدائرة م

ق $\overset{\frown}{(أ د)}$ = ٨٠

ق $\overset{\frown}{(د جـ)}$ = ٦٠

أوجد قياسات زوايا الشكل أ ب جـ د

الدرس السادس 6

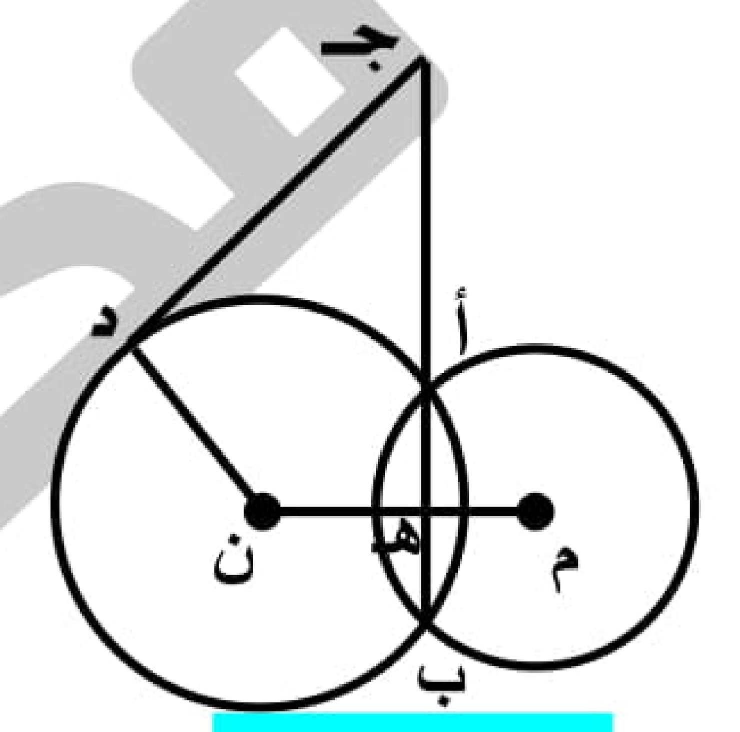
إثبات أن الشكل رباعى دائرى

لو قالك اثبت أن الشكل رباعى دائرى إبحث عن إحدى الحالات الثلاثة الآتية واثبتها :

زاويتان متقابلتان واثبت أن : مجموعهما = ١٨٠

مثال لذيذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : جـ هـ ن د رباعى دائرى



طريقة الحل

في الشكل جـ هـ ن د

ق ($\hat{د}$) = ٩٠° عشان المماس

ق ($\hat{هـ}$) = ٩٠° عشان الوتر المشترك

و الزاويتين د ، هـ متقابلتين

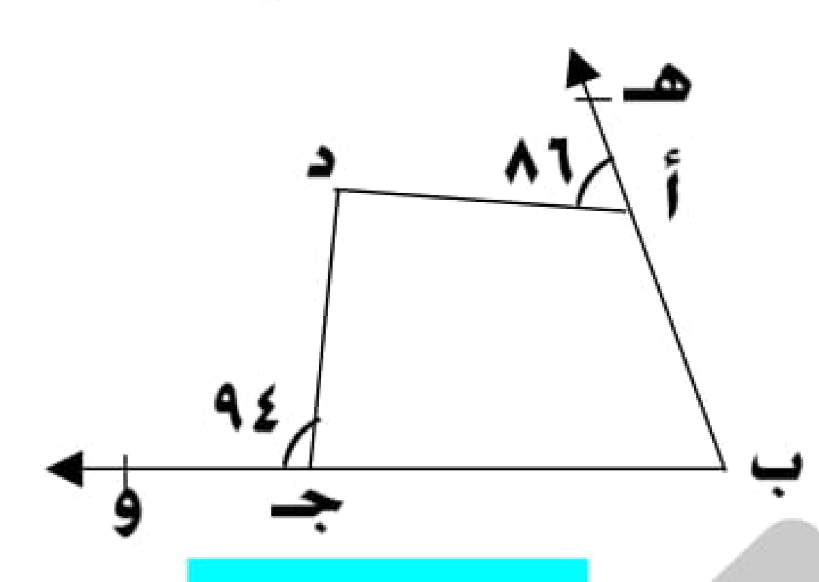
ولو جمعناهم = ١٨٠°

∴ الشكل رباعى دائرى

زاوية خارجة قياسها = قياس المقابلة للمجاورة

مثال لذيذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : أ ب جـ د رباعى دائرى



طريقة الحل

شايف الزاوية ٩٤ ؟

هي واللى جنبها زاوية مستقيمة

∴ق (د $\hat{جـ}$ ب) = ١٨٠ ـ ٩٤ = ٨٦

كده ظهر لينا زاويتين متساويتين

الخارجة = المقابلة للمجاورة

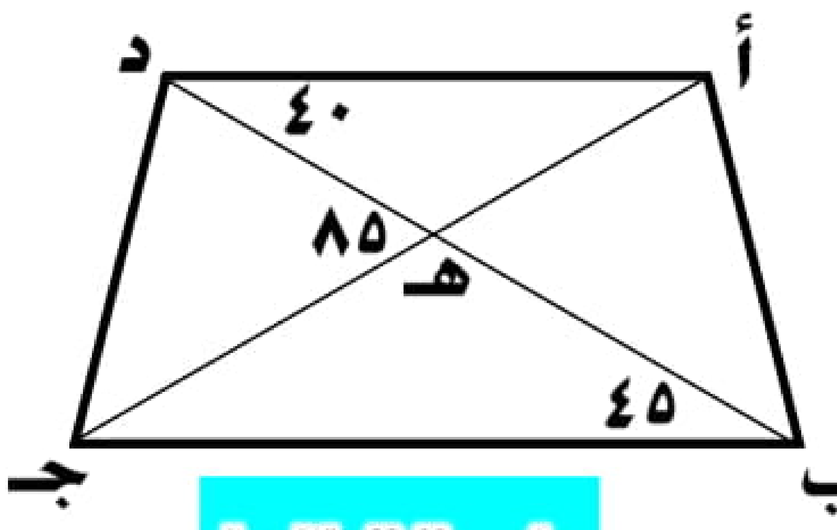
وهما ق(هـ $\hat{أ}$ د) = ق(د $\hat{جـ}$ ب)

∴ الشكل رباعى دائرى

زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ومتساويتان

مثال لذيذ

في الشكل المقابل عايزين نثبت أن : أ ب جـ د رباعى دائرى



طريقة الحل

شايف الزاوية ٨٥ ؟

دى خارجة عن △ هـ ب جـ

∴ق (هـ $\hat{جـ}$ ب) = ٨٥ ـ ٤٥ = ٤٠°

كده ظهر لينا زاويتين متساويتين

ومرسومتين على قاعدة واحدة

وهما ق(أ $\hat{د}$ ب) = ق(أ $\hat{جـ}$ ب)

∴ الشكل رباعى دائرى

سؤال مهم:

اذكر ٣ حالات يكون فيها الشكل الرباعى دائرياً ؟

الإجابة:

١- إذا وجد زاويتان متقابلتان متكاملتان

٢- إذا وجد زاوية خارجة قياسها = المقابلة للمجاورة

٣- إذا وجد زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساوبتان

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

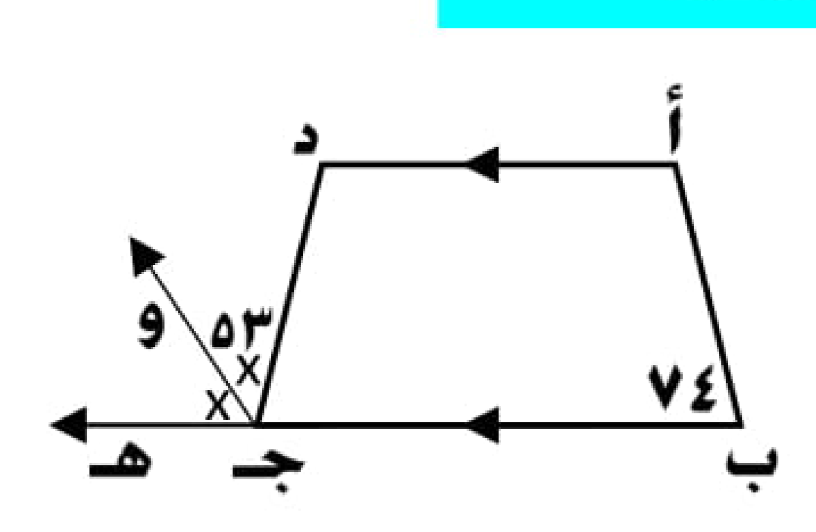
أ د // ب جـ

جـ و ينصف د $\hat{جـ}$ هـ

ق (د $\hat{جـ}$ و) = ٥٣°

ق($\hat{ب}$) = ٧٤°

اثبت أن: أ ب جـ د رباعى دائرى



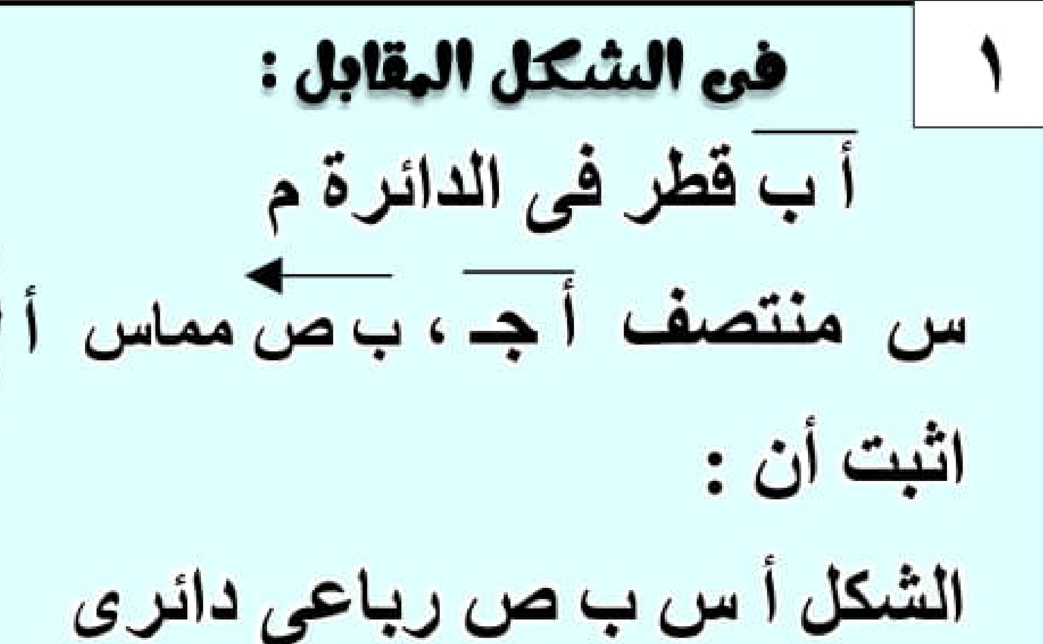
١ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

س منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overleftarrow{بص}$ مماس

اثبت أن :

الشكل أ س ب ص رباعى دائرى



الحل

∵ س منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

∴ ق ($\hat{أسم}$) = ٩٠° ← (١)

∵ $\overleftarrow{بص}$ مماس ، $\overline{أب}$ قطر ∴ $\overline{أب}$ ⊥ $\overleftarrow{بص}$

∴ ق ($\hat{مبص}$) = ٩٠° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق ($\hat{أسص}$) = ق ($\hat{أبص}$)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى أ ص

وفى جهة واحدة منها

∴ أ س ب ص رباعى دائرى

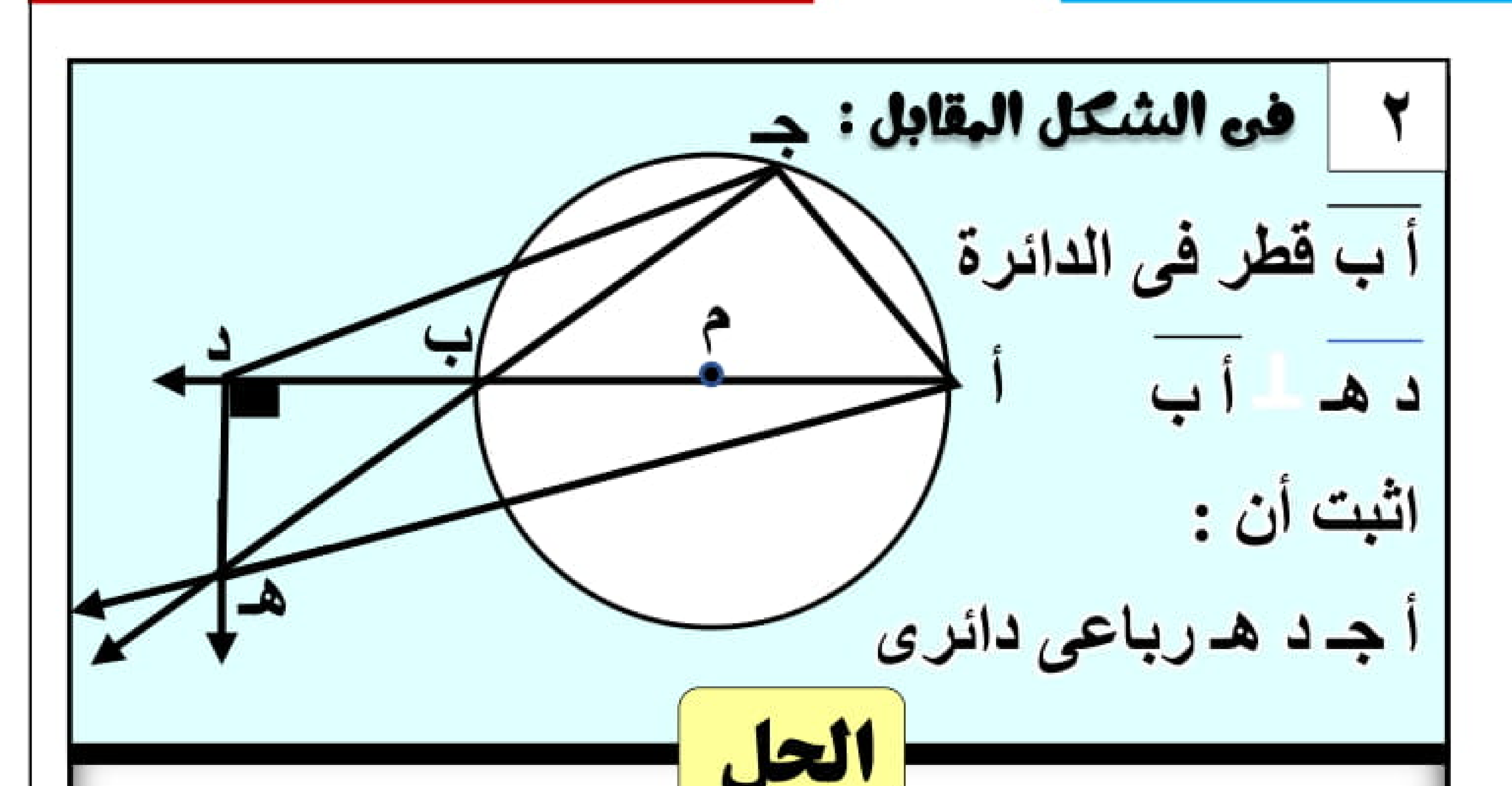
٢ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة

$\overline{دهـ}$ ⊥ $\overline{أب}$

اثبت أن :

أ جـ د هـ رباعى دائرى



الحل

∵ $\overline{دهـ}$ ⊥ $\overline{أد}$ ∴ ق ($\hat{أدهـ}$) = ٩٠° ← (١)

∵ $\hat{أجـب}$ محيطية مرسومة في نصف دائرة

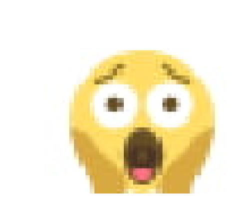
∴ ق ($\hat{أجـب}$) = ٩٠° ← (٢)

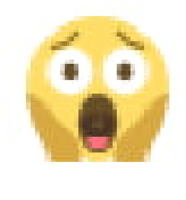
من ١ ، ٢ نلاحظ: ق ($\hat{أدهـ}$) = ق ($\hat{أجـهـ}$)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى أ هـ

وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ جـ د هـ رباعى دائرى



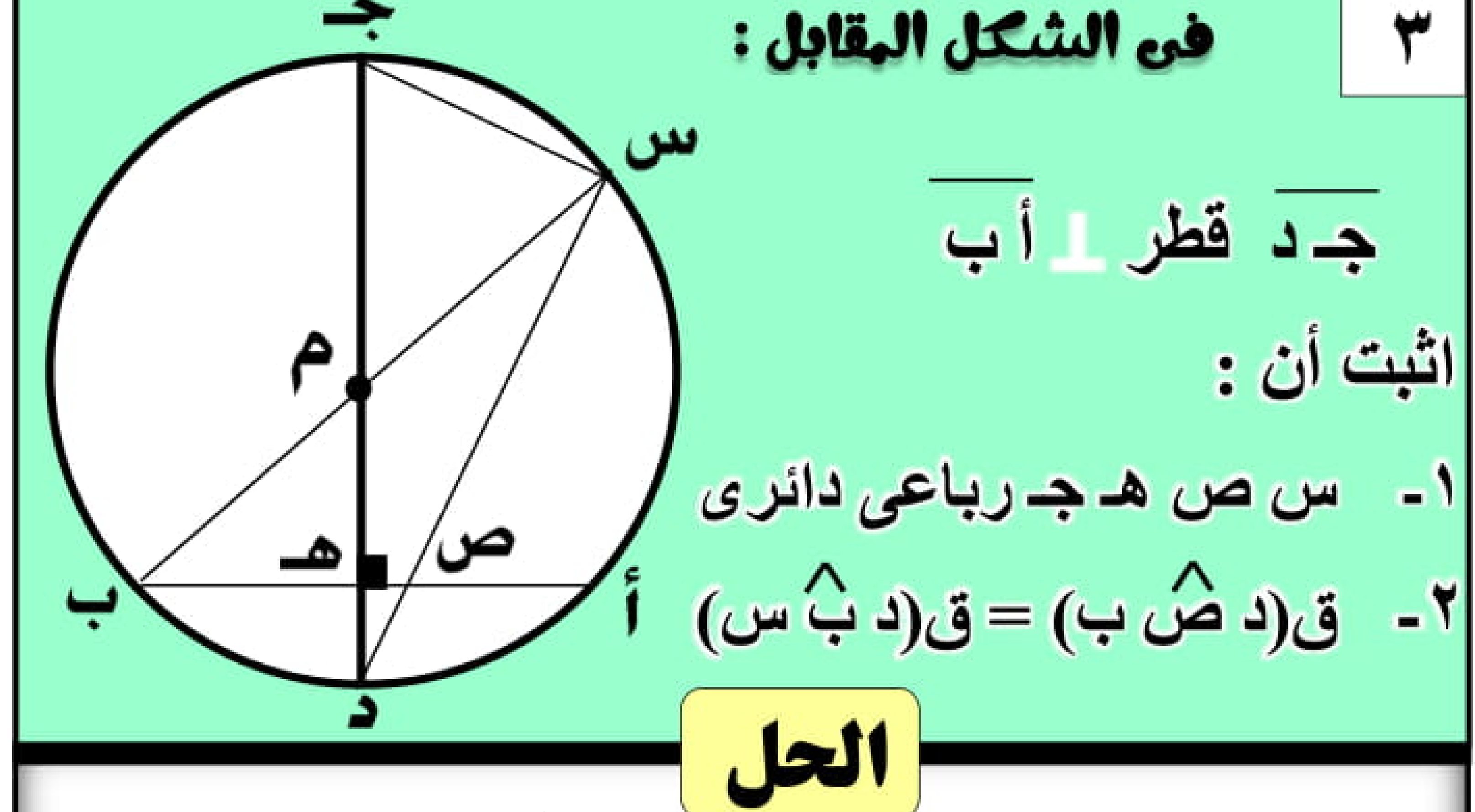
٣ في الشكل المقابل :

$\overline{جـد}$ قطر ⊥ $\overline{أب}$

اثبت أن :

١- س ص هـ جـ رباعى دائرى

٢- ق($\hat{دصب}$) = ق($\hat{دبس}$)



الحل

∵ $\overline{جـد}$ ⊥ $\overline{أب}$ ∴ ق ($\hat{جـهـص}$) = ٩٠°

∵ ق ($\hat{جـسد}$) = ٩٠° محيطية مرسومة في نصف دائرة

∵ ق ($\hat{جـهـص}$) + ق ($\hat{جـسد}$) = ١٨٠° (متقابلتان متكاملتان)

∴ س ص هـ جـ رباعى دائرى **المطلوب الأول**

∵ ق ($\hat{دصب}$) = ق ($\hat{جـ}$) ← (١)

لأن قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∵ ق($\hat{دبس}$) = ق ($\hat{جـ}$) ← (٢)

لأنهما محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{دس}$

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق($\hat{دصب}$) = ق ($\hat{دبس}$)

٤ في الشكل المقابل : **مهمة**

أ ب = أ جـ ،

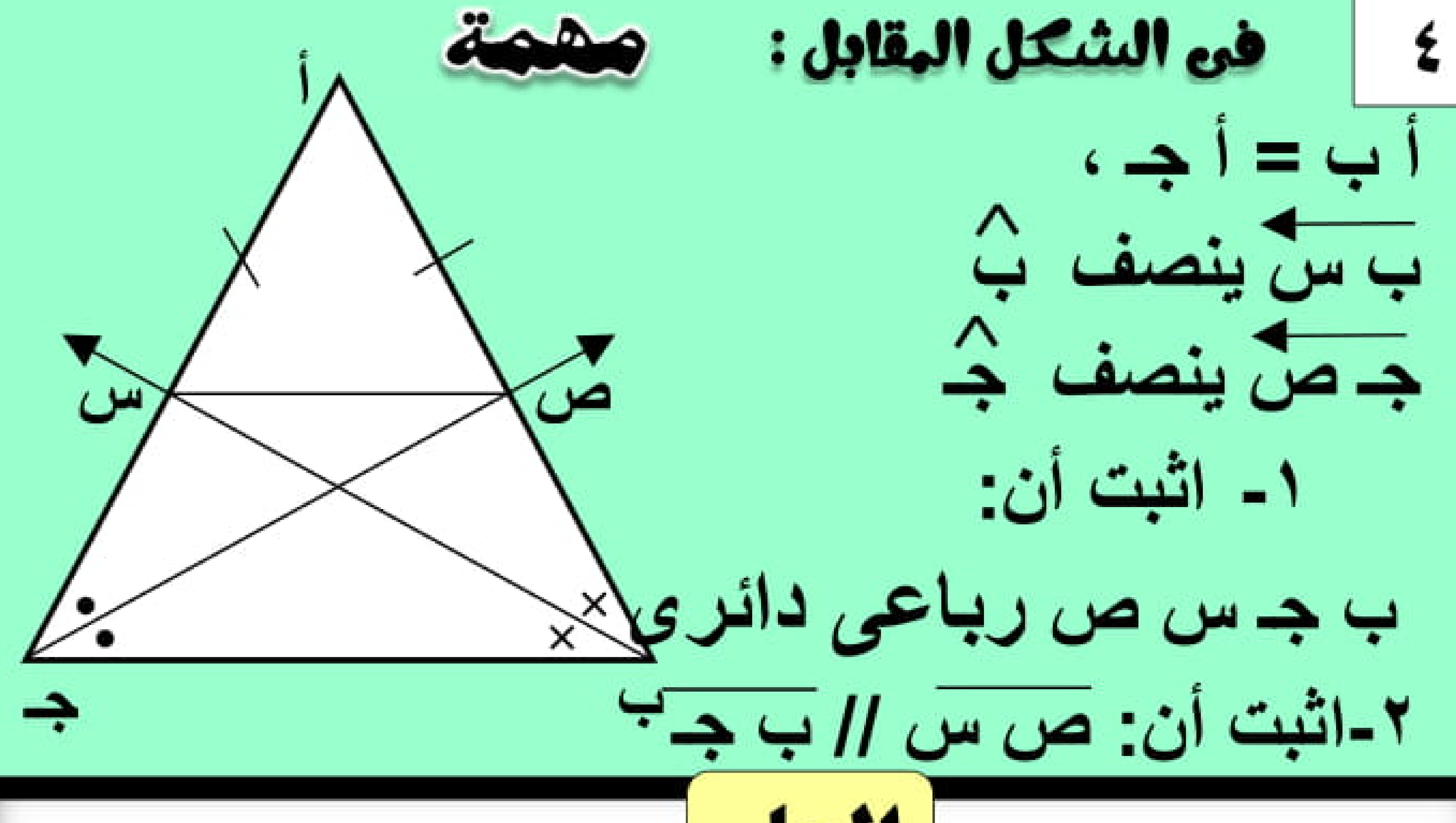
$\overleftarrow{بس}$ ينصف $\hat{ب}$

$\overleftarrow{جـص}$ ينصف $\hat{جـ}$

١- اثبت أن:

ب جـ س ص رباعى دائرى

٢-اثبت أن: $\overline{صس}$ // $\overline{بجـ}$



الحل

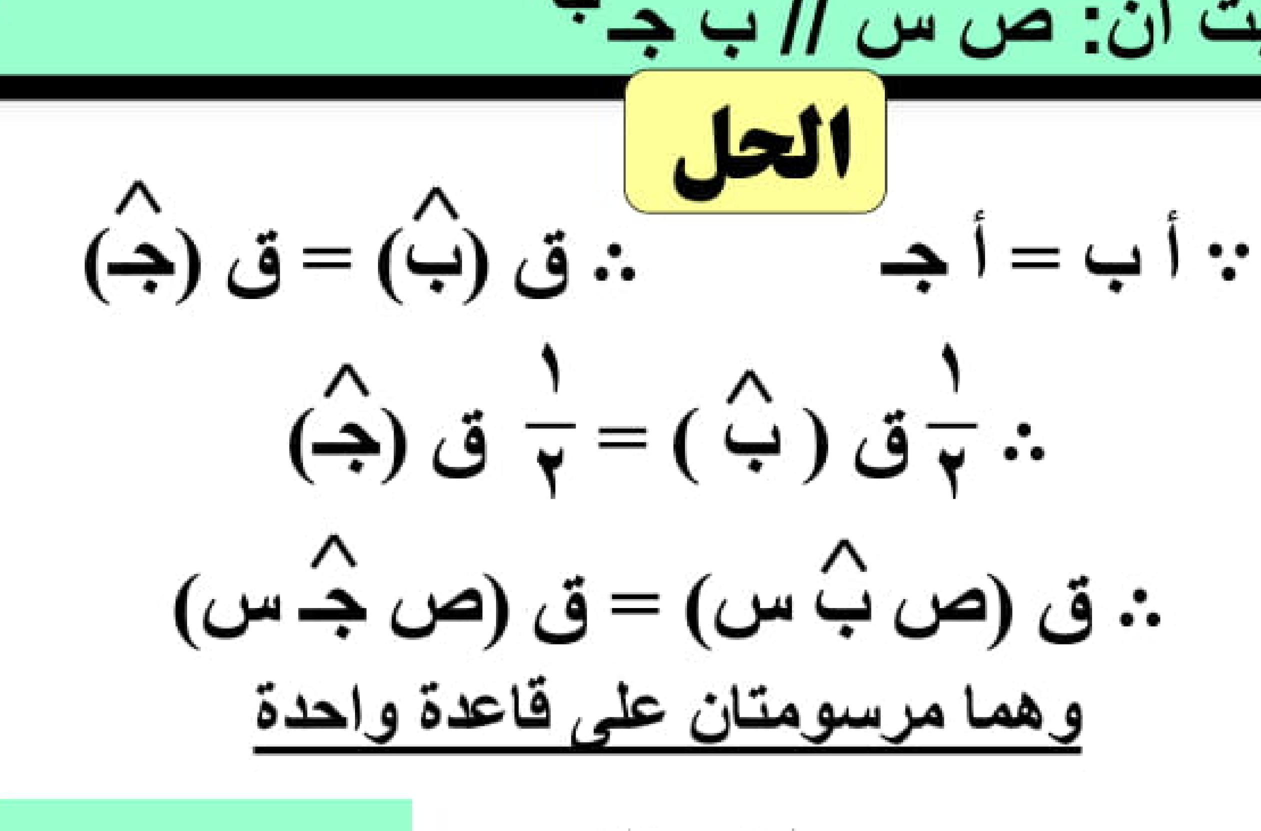
∵ أ ب = أ جـ ∴ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

∴ $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{ب}$) = $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{جـ}$)

∴ ق ($\hat{صبس}$) = ق ($\hat{صجـس}$)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة

∴ ب جـ س ص رباعى دائرى **المطلوب الأول**



∵ ب جـ س ص رباعى دائرى

∴ ق($\hat{أصس}$) الخارجة = ق($\hat{جـ}$) المقابلة للمجاورة

∴ ق ($\hat{أصس}$) = ق ($\hat{ب}$) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{صس}$ // $\overline{بجـ}$

١

أ ب جـ د شكل رباعى فيه
أ د // ب جـ
اثبت أن
الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

الحل

ق (ب هـ^ جـ) = ١٨٠ ـ ٧٦ = ١٠٤
في Δ ب هـ جـ :
ق (ب جـ^ هـ) = ١٨٠ ـ (٣٨ + ١٠٤) = ٣٨
∵ أ د // ب جـ
∴ ق (د أ^ جـ) = ٣٨ بالتبادل
∴ ق (د أ^ جـ) = ق (د ب^ جـ)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة د جـ
∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٢

أ د = أ جـ ،
أ و ينصف ب أ جـ
اثبت أن:
د ب هـ و رباعى دائرى

الحل

Δ Δ أ د هـ ، أ جـ هـ فيهما:
ق (د أ^ هـ) = ق (جـ أ^ هـ)
أ د = أ جـ
أ هـ ضلع مشترك
∴ Δ أ د هـ ≡ Δ أ جـ هـ
∴ ق (أ جـ^ هـ) = ق (أ د^ هـ) ١
∵ ق (أ جـ^ هـ) = ق (أ و^ ب) ٢
(لأنهما محيطيتان مشتركتان في القوس أ ب)
من ١ ، ٢: ∴ ق (أ د^ هـ) = ق (أ و^ ب)
∴ الشكل د ب و هـ رباعى دائرى

٣

أ ب قطر في الدائرة م
هـ منتصف أ جـ ، د ب مماس
اثبت أن:
١) م ب د هـ رباعى دائرى
٢) ق (ب أ^ س) = $\frac{١}{٢}$ ق (د^)

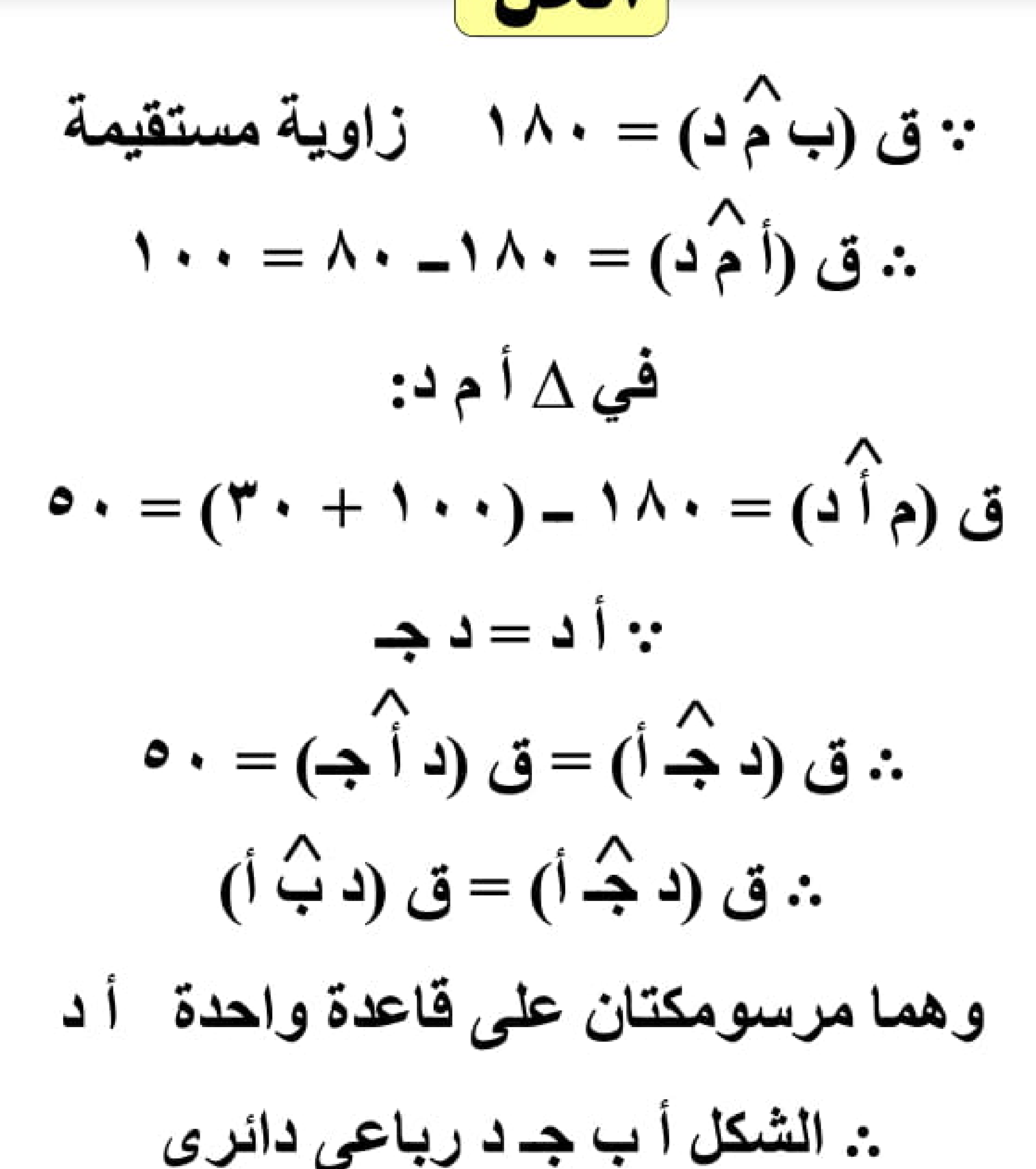
الحل

∵ د ب مماس ∴ د ب ⊥ أ ب
∴ ق (ب^) = ٩٠ ← ١
∵ هـ منتصف أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ جـ
∴ ق (م هـ^ د) = ٩٠ ← ٢
من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (ب^) = ق (م هـ^ د)
∴ الشكل م ب د هـ رباعى دائرى
∴ ق (د^) = ق (ب م^ س) الخارجة ← ٣
∵ ق (ب أ^ س) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (ب م^ س) المركزية ← ٤
من ٣ ، ٤ : ∴ ق (ب أ^ س) = $\frac{١}{٢}$ ق (د^)

٤

أ ب جـ د شكل رباعى
د أ = د جـ
اثبت أن:
الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

الحل



∵ ق (ب م^ د) = ١٨٠ زاوية مستقيمة
∴ ق (أ م^ د) = ١٨٠ ـ ٨٠ = ١٠٠
في Δ أ م د:
ق (م أ^ د) = ١٨٠ ـ (١٠٠ + ٣٠) = ٥٠
∵ أ د = د جـ
∴ ق (د جـ^ أ) = ق (د أ^ جـ) = ٥٠
∴ ق (د جـ^ أ) = ق (د ب^ أ)
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أ د
∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

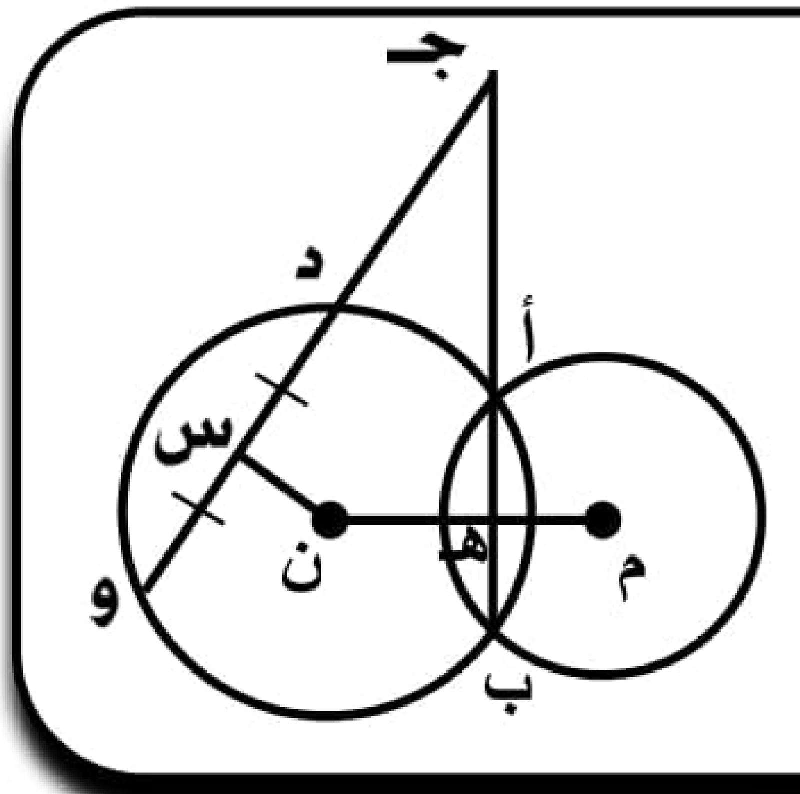
١

م ، دائرتان متقاطعتان

س منتصف $\overline{\text{د و}}$

اثبت أن :الشكل

جـ هـ ن س رباعى دائرى



الحل

....

....

....

٢

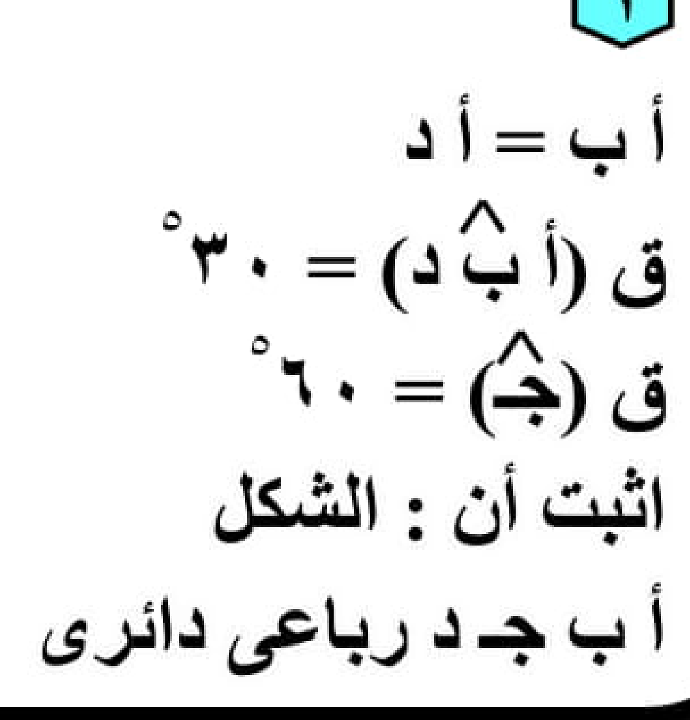
أ ب = أ د

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ٣٠°

ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٦٠°

اثبت أن : الشكل

أ ب جـ د رباعى دائرى

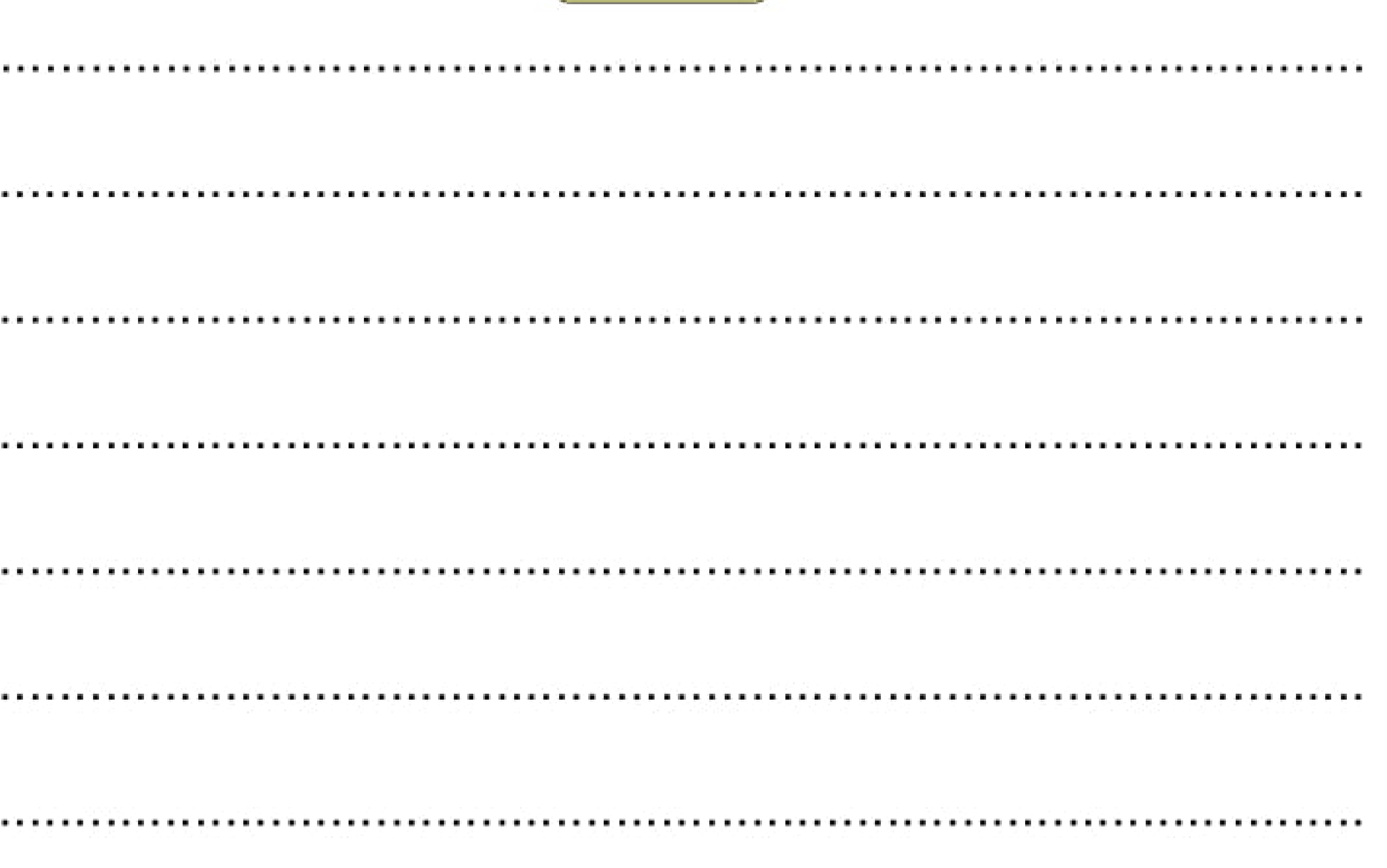


الحل

....

....

....



٣

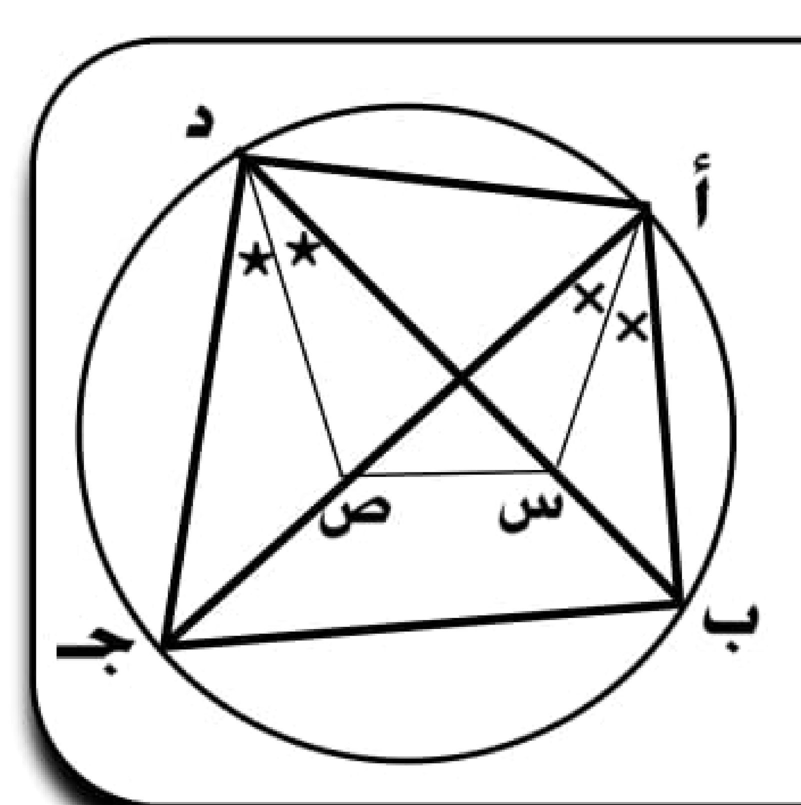
$\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

$\overrightarrow{\text{د ص}}$ ينصف ∠ ب د جـ

اثبت أن : الشكل

١) أ س ص د رباعى دائرى

٢) $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



الحل

....

....

....



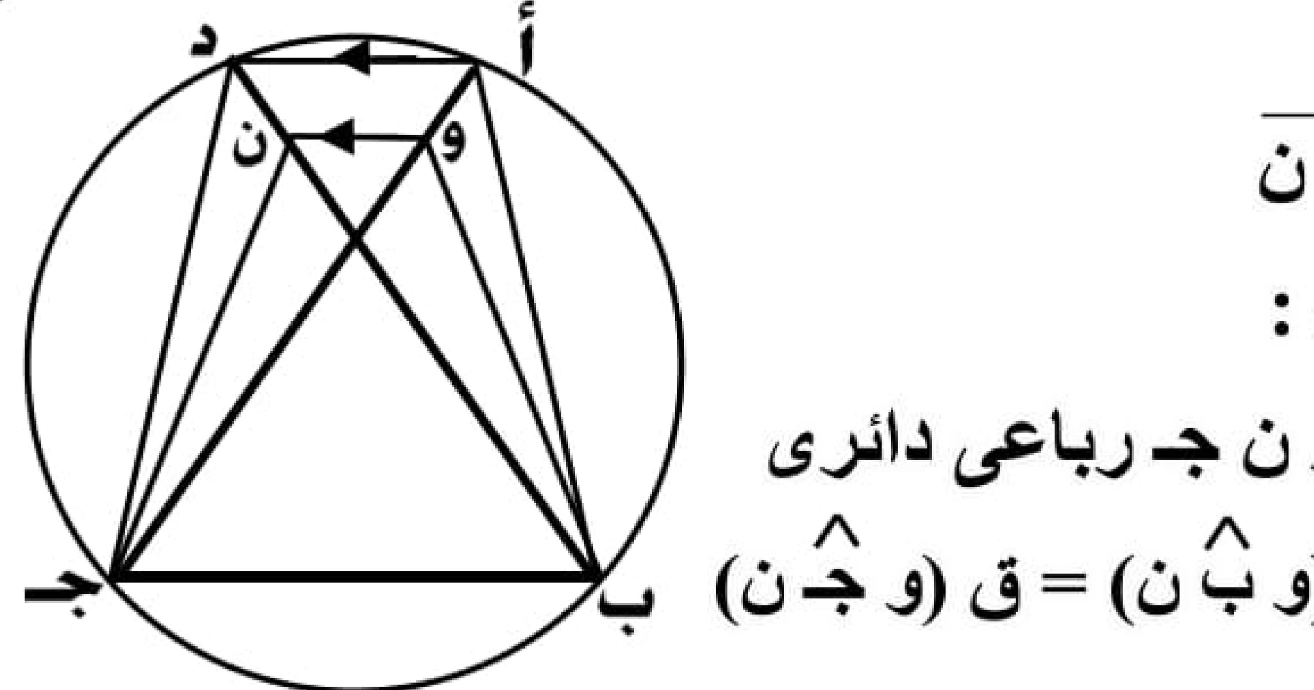
٤

$\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{و ن}}$

اثبت أن :

١) ب و ن جـ رباعى دائرى

٢) ق (و $\hat{\text{ب}}$ ن) = ق (و $\hat{\text{جـ}}$ ن)



الحل

....

....

....

١ اذكر حالتين يكون فيهما الشكل الرباعى دائريا

٢ **فى الشكل المقابل :**

أ ب جـ د شكل رباعى

أ جـ ⊥ ب د

بؤهن أن:

الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٣ **فى الشكل المقابل :**

ب جـ قطر في الدائرة م

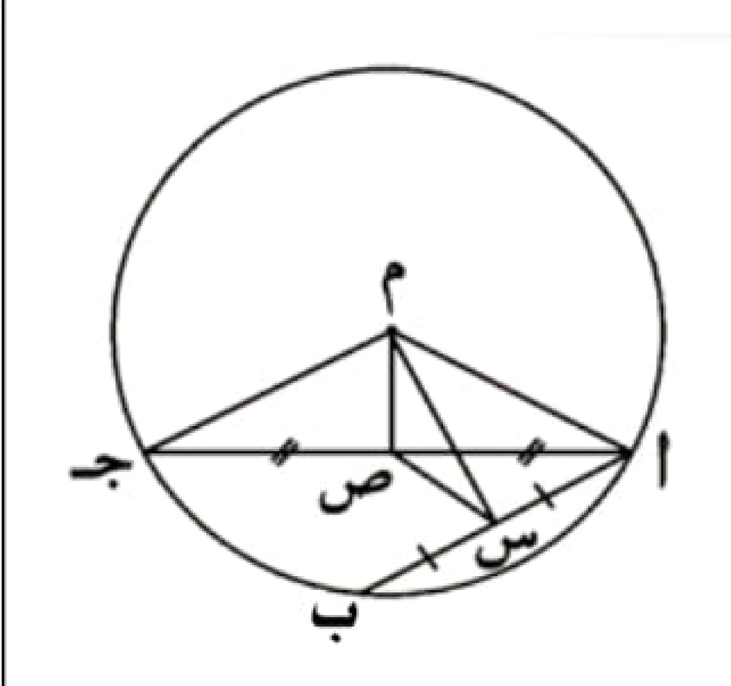
هـ د   ب جـ

اثبت أن:

١) الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى

٢) ق (د هـ^ جـ) = ١/٢ ق (أ جـ⌒)

٤ **فى الشكل المقابل :**



س ، ص منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب

اثبت أن :

أ س ص م رباعى دائرى

٥ **فى الشكل المقابل :**

أ ب قطر في الدائرة م

د منتصف أ جـ

ب و مماس

اثبت أن: ١) م ب و د رباعى دائرى

٢) ق (و^) = ٢ ق (هـ^)

٦ أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة ، س ∈ أ ب

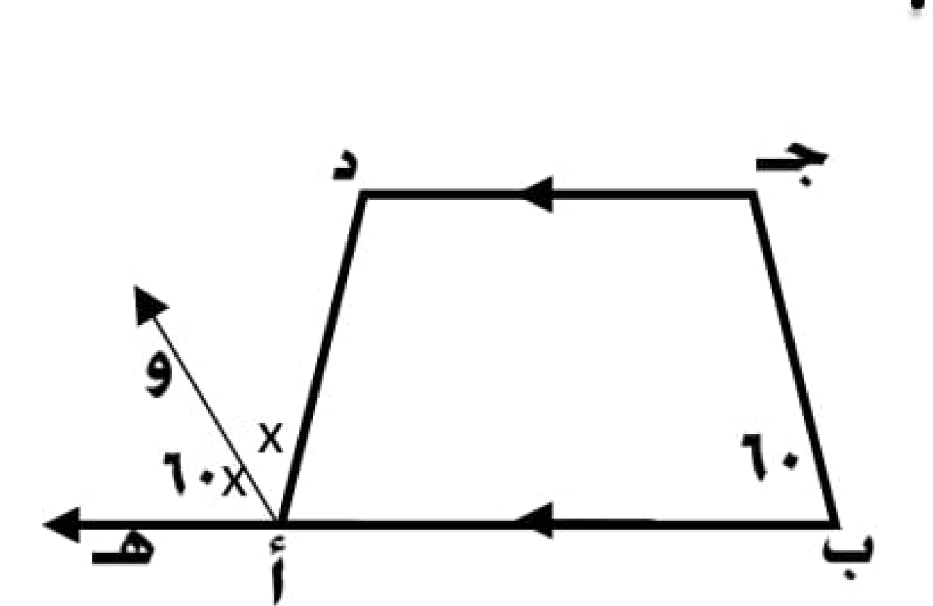
، ص ∈ أ جـ بحيث: ق (أ س) = ق (أ ص)

، جـ س ∩ أ ب = { د } ، ب ص ∩ أ جـ = { هـ }

اثبت أن: ١) الشكل ب جـ هـ د رباعى دائرى

٢) ق (د هـ^ ب) = ق (س أ^ ب)

٧ **فى الشكل المقابل :**



جـ د // ب هـ

أ و ينصف ∠ د أ هـ

ق (و أ^ هـ) = ٦٠°

ق(ب^) = ٦٠°

اثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٨ **فى الشكل المقابل :**

م ، ن دائرتان متقاطعتان في جـ ، د

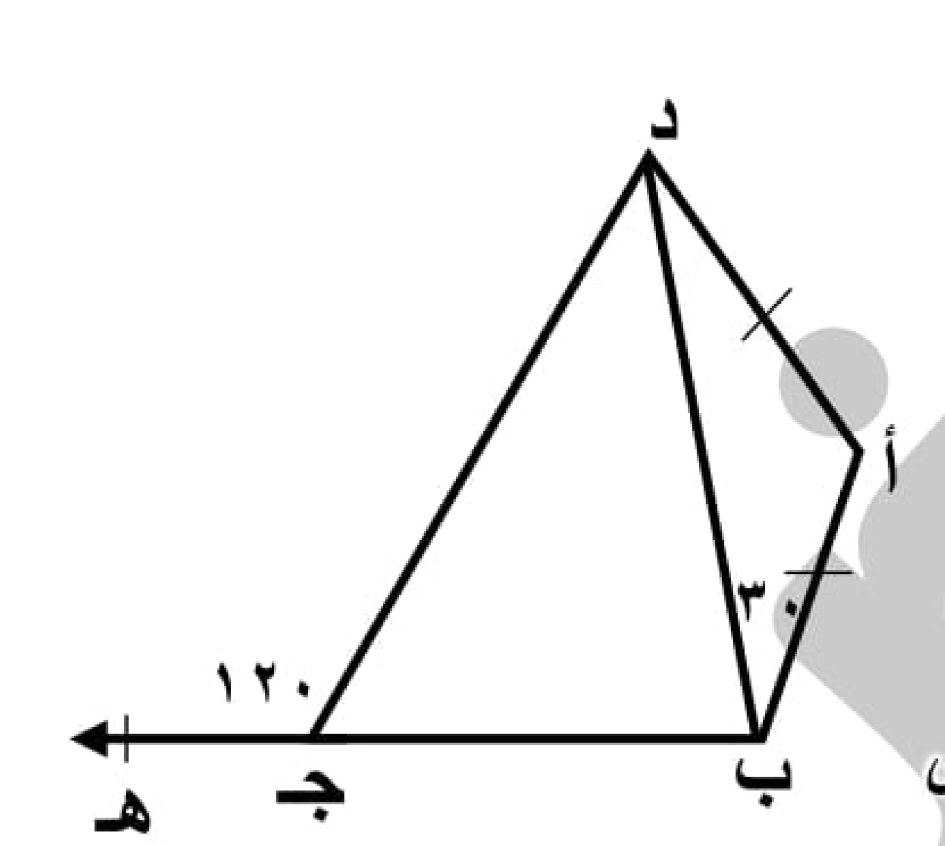
أ ب مماس للدائرة م عند ب

م ن ∩ جـ د = { هـ }

اثبت أن :

الشكل أ ب م هـ رباعى دائرى

٩ **فى الشكل المقابل :**



أ د = أ ب

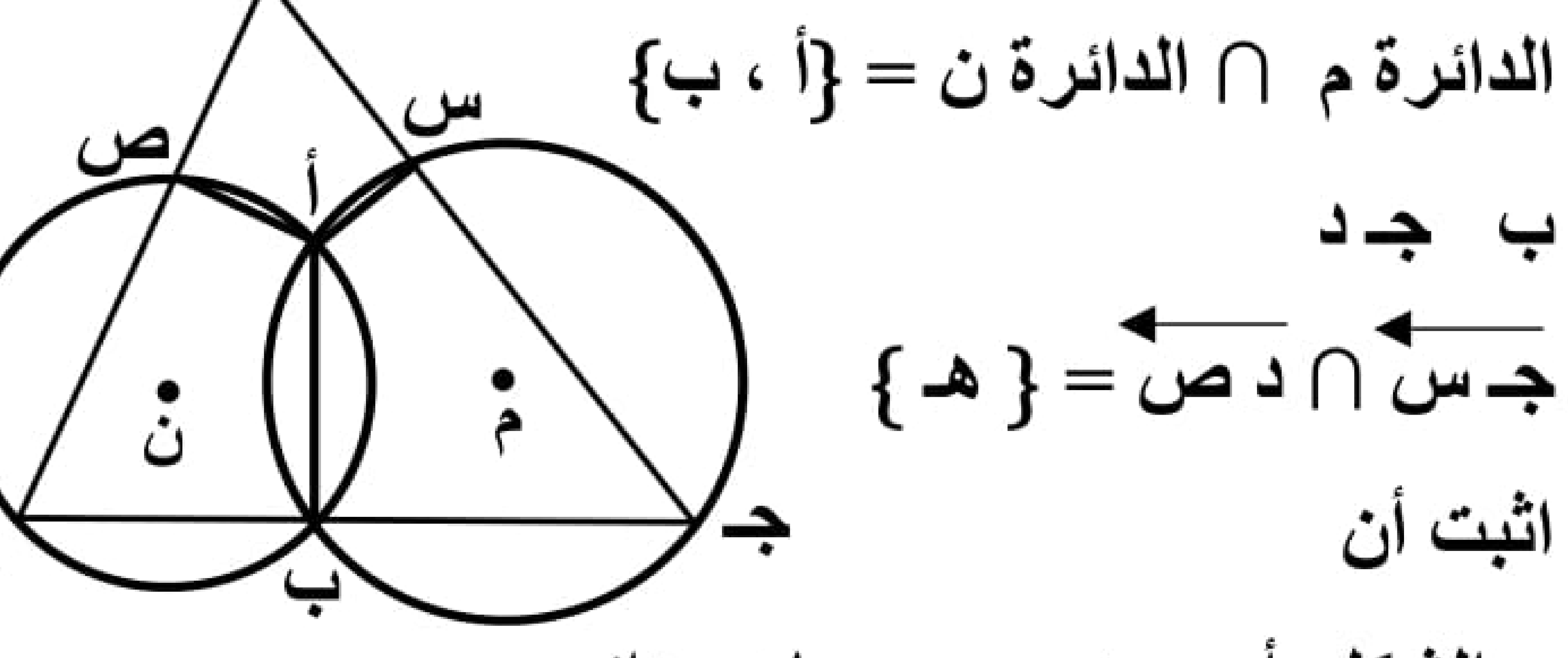
ق (أ ب^ د) = ٣٠

ق (د جـ^ هـ) = ١٢٠

اثبت أن : الشكل

أ ب جـ د رباعى دائرى

١٠ **فى الشكل المقابل :**



الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب}

ب جـ د

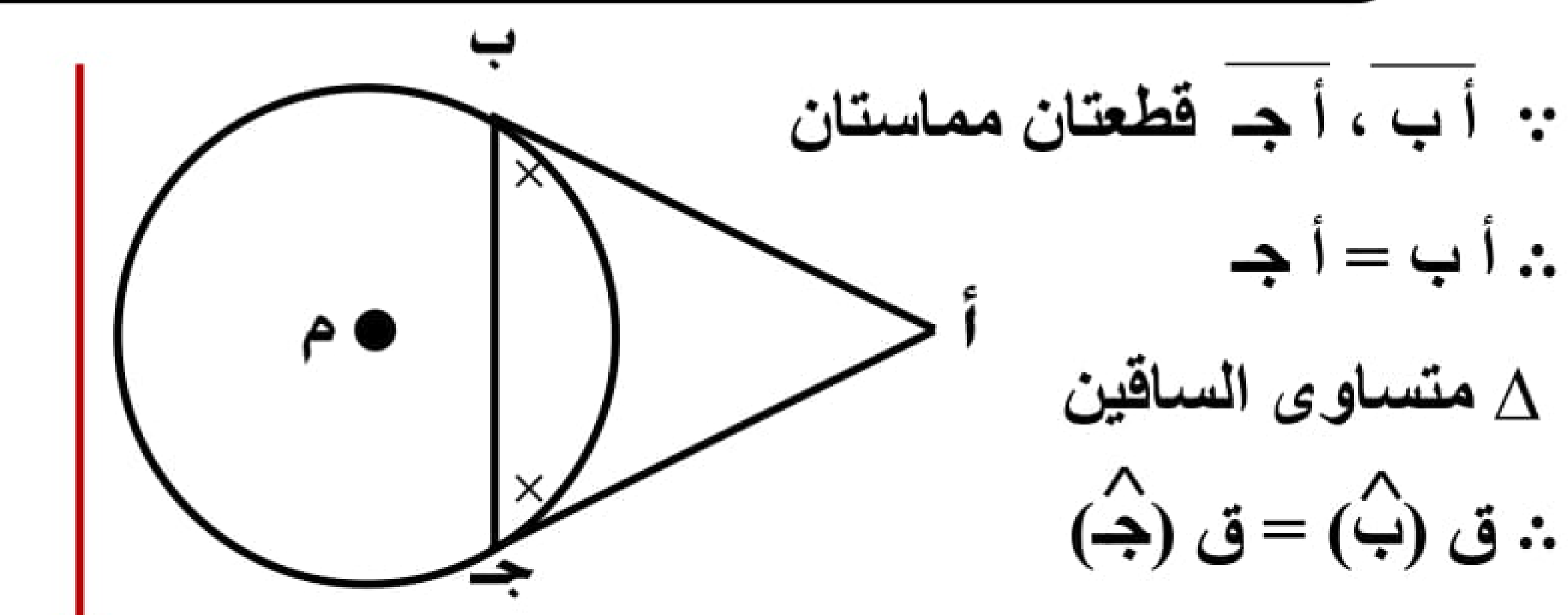
جـ س ∩ د ص = { هـ }

اثبت أن

الشكل أ س هـ ص رباعى دائرى

الدرس السابع 7 — العلاقة بين مماسات الدائرة

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان في الطول.

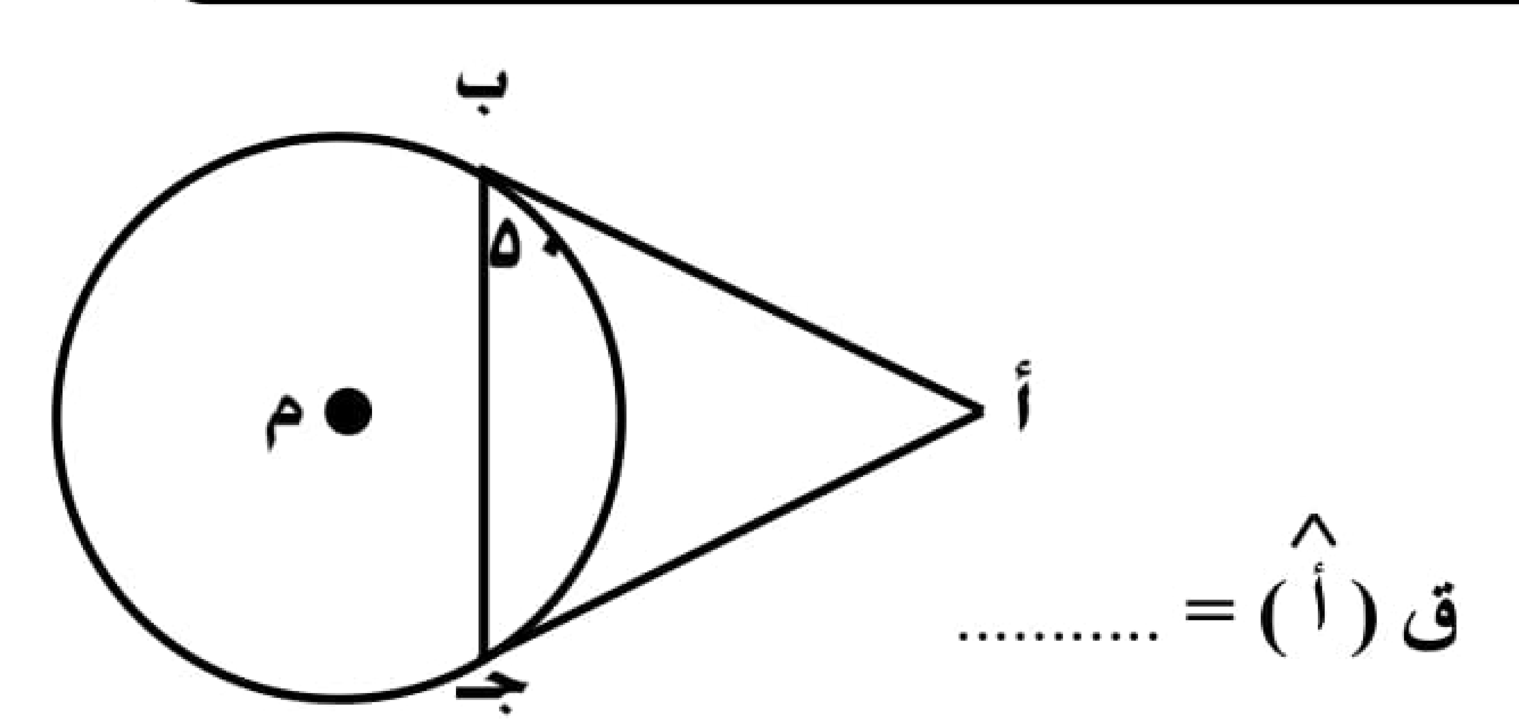


∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان

∴ أ ب = أ جـ

△ متساوى الساقين

∴ ق $(\hat{ب})$ = ق $(\hat{جـ})$



ق ($\hat{أ}$) = ...

نتائج هامة

- ◆ م أ ينصف زاوية أ
- ◆ م أ ينصف زاوية م
- ◆ م أ ينصف الوتر ب جـ
- ◆ م أ عمودى على الوتر ب جـ

الخلاصة : م أ ينصف زاويتين و ..

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

مثال ١

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٢٥°

أوجد : ق (ب $\hat{م}$ جـ)

الحل

∵ $\overline{أب}$ مماسة ، $\overline{ب م}$ نصف قطر ∴ ق (أ $\hat{ب}$ م) = ٩٠°

في △ أ ب م :

ق (أ $\hat{م}$ ب) = ١٨٠ – (٣٥+٩٠) = ٥٥°

∵ $\overleftarrow{م أ}$ ينصف ∠ ب م جـ

∴ ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ٥٥ × ٢ = ١١٠°

مثال ٢

△ أ ب جـ يمس الدائرة

من الخارج في س ، ص ، ع

أ س = ٥سم ، ب ص = ٤سم

جـ ع = ٣ سم

أوجد محيط △ أ ب جـ

الحل

أ س = أ ع = ٥ سم   قطعتان مماستان

ب ص = ب س = ٤ سم   قطعتان مماستان

جـ ع = جـ ص = ٣٥ سم   قطعتان مماستان

أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، ب جـ = ٤ + ٣ = ٧ سم

أ جـ = ٥ + ٣ = ٨ سم   المحيط = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤ سم

عدد المماسات المشتركة

- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ٤
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج ٣
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين ٢
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل ١
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متحدتا المركز صفر
- ❖ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتان صفر



١ في الشكل المقابل :

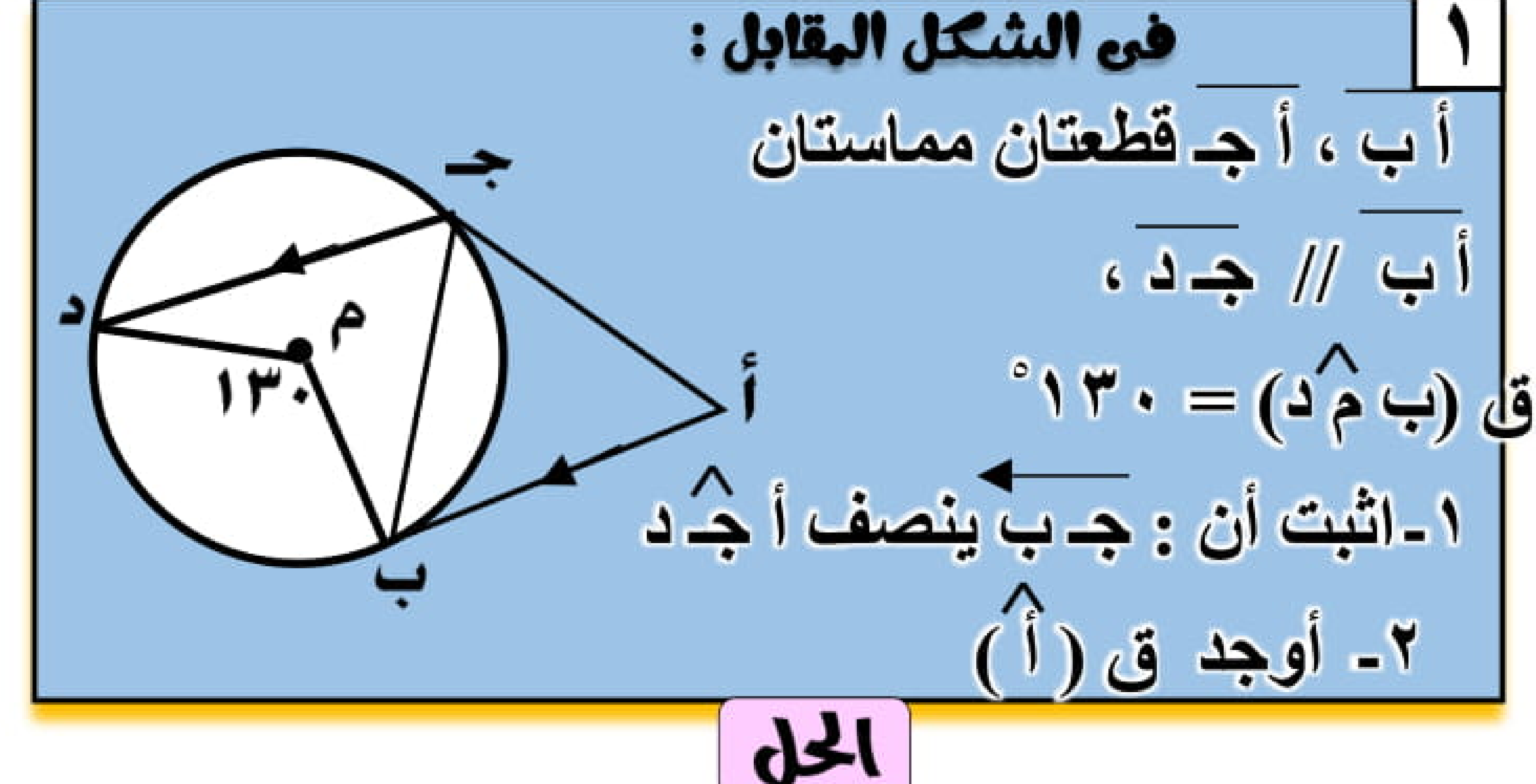
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

أ ب // جـ د ،

ق (ب م د) = ١٣٠°

١- اثبت أن : جـ ب ينصف أ جـ د

٢- أوجد ق (أ)



الحل

∵ ق (ب جـ د) المحيطية = ١/٢ ق (م) المركزية

∴ ق(ب جـ د) = ٦٥°

∵ أ ب // جـ د

∴ ق (أ ب جـ) = ق (ب جـ د) = ٦٥° بالتبادل ← (١)

∵ أ ب = ب جـ (قطعتان مماستان)

∴ ق (أ ب جـ) = ق (أ جـ ب) = ٦٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (ب جـ د) = ق (أ جـ ب)

∴ جـ ب ينصف أ جـ د **المطلوب الأول**

ق (أ) = ١٨٠ – (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

٢ في الشكل المقابل :

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (ب أ م) = ٢٥°

هـ ∈ ب جـ الأكبر

أوجد: ١- ق (أ جـ ب)

٢- ق (ب هـ جـ)

الحل

∵ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان ∴ أ م ينصف أ

∴ ق (أ) = ٢ × ٢٥ = ٥٠°

في Δ أ جـ ب : ق (أ جـ ب) = (١٨٠ – ٥٠) / ٢ = ٦٥° **أولا**

∵ أ جـ مماسة ، م جـ نصف قطر ∴ م جـ ⊥ أ جـ

∴ ق (أ جـ م) = ٩٠°

كذلك ∵ أ ب مماسة ، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب

∴ ق (أ ب م) = ٩٠°

في الشكل الرباعى أ ب م جـ

ق (جـ م ب) = ٣٦٠ – (٥٠ + ٩٠ + ٩٠) = ١٣٠°

∴ ق (ب هـ جـ) المحيطية = ١/٢ ق (ب م جـ) المركزية = ٦٥°

٣ في الشكل المقابل :

س أ ، س ب مماسان

ق (أ س ب) = ٧٠°

ق (د جـ ب) = ١٢٥°

اثبت أن: ١- أ ب ينصف د أ س

٢- أ د // س ب

الحل

∵ أ ب جـ د رباعى دائرى ∴ ق (جـ) + ق (د أ ب) = ١٨٠

∴ ق (د أ ب) = ١٨٠ – ١٢٥ = ٥٥° ← (١)

∵ س أ ، س ب مماستان للدائرة ∴ س أ = س ب

∴ Δ س أ ب متساوى الساقين

∴ ق (س أ ب) = (١٨٠ – ٧٠) / ٢ = ٥٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق(د أ ب) = ق (س أ ب)

∴ أ ب ينصف د أ س **المطلوب الأول**

∵ ق (د أ س) = ٥٥ + ٥٥ = ١١٠°

∴ ق(د أ س) + ق(س) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما متداخلتان

∴ أ د // س ب

٤ في الشكل المقابل :

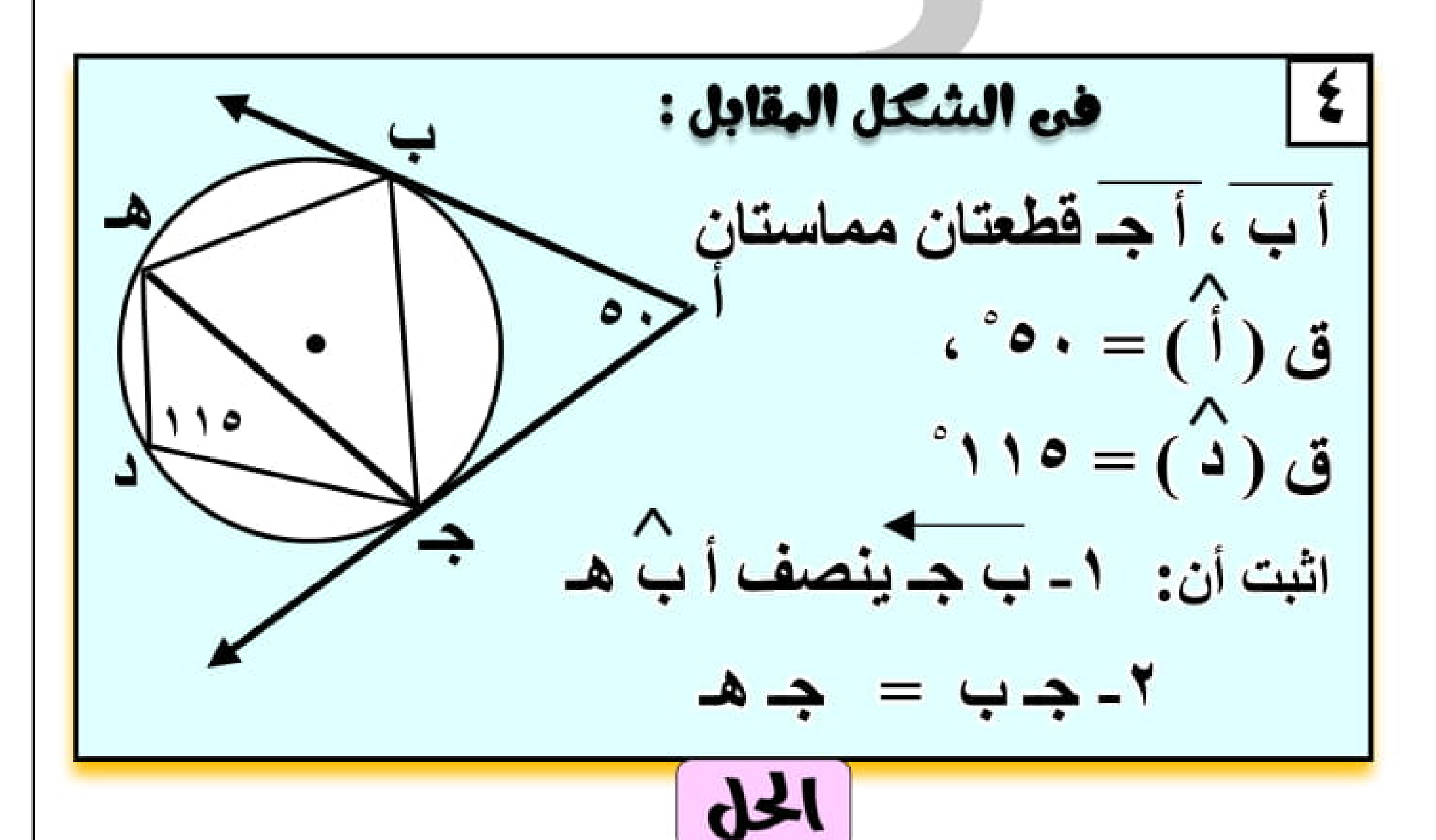
أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (أ) = ٥٠° ،

ق (د) = ١١٥°

اثبت أن: ١- ب جـ ينصف أ ب هـ

٢- جـ ب = جـ هـ



الحل

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان

∴ ق (أ ب جـ) = (١٨٠ – ٥٠) / ٢ = ٦٥° ← (١)

∵ ب جـ د هـ رباعى دائرى

∴ ق (جـ ب هـ) = ١٨٠ – ١١٥ = ٦٥° ← (٢)

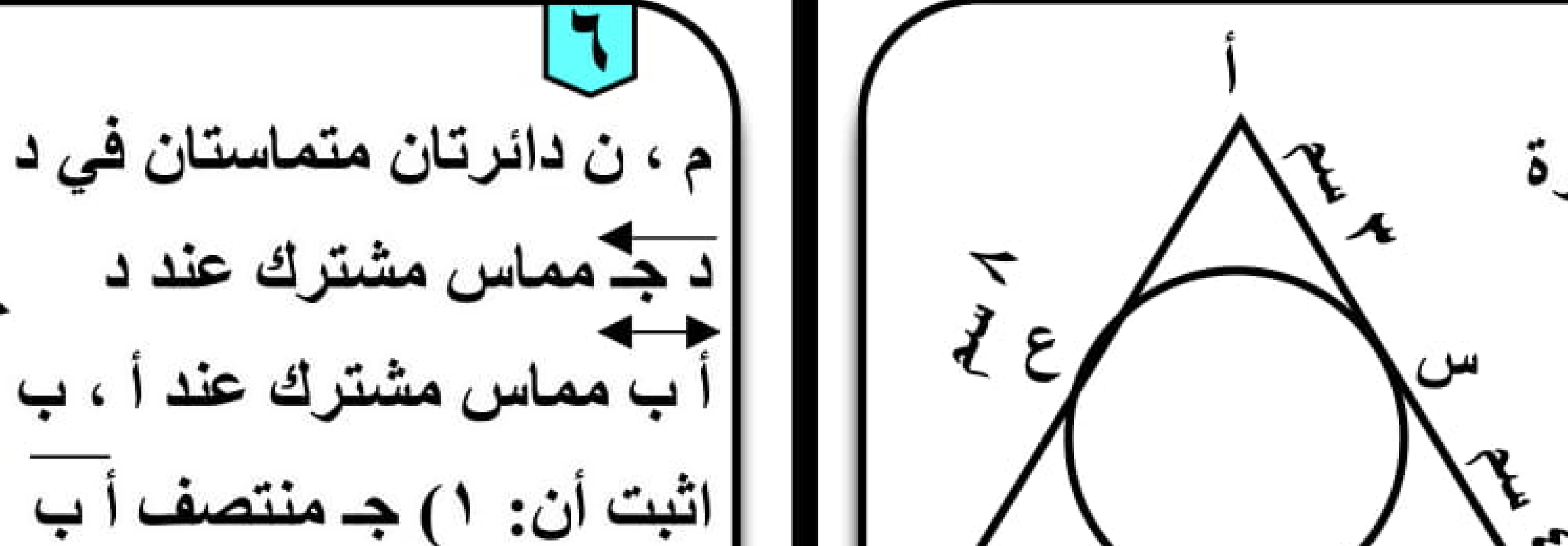
من ١ ، ٢ ينتج أن: ق (أ ب جـ) = ق (جـ ب هـ) ← (٣)

∴ ب جـ ينصف أ ب هـ المطلوب الأول

∵ ق (أ ب جـ) المماسية = ق (جـ هـ ب) المحيطية ← (٤)

من ٣ ، ٤ ينتج أن : ق (جـ ب هـ) = ق (جـ هـ ب)

∴ جـ ب = جـ هـ المطلوب الثانى



٥

$\triangle$ أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة وتمس أضلاعه فى س ، هـ ، ع

أ س = ٣ سم ، س ب = ٤ سم ، أ جـ = ٨ سم

أوجد محيط $\triangle$ أ ب جـ

الحل

$\because$ أ س = أ ع قطعتان مماستان

$\therefore$ أ ع = ٣ سم

$\therefore$ ع جـ = ٨ − ٤ = ٥ سم

$\because$ جـ ع = جـ هـ قطعتان مماستان

$\therefore$ جـ هـ = ٥ سم

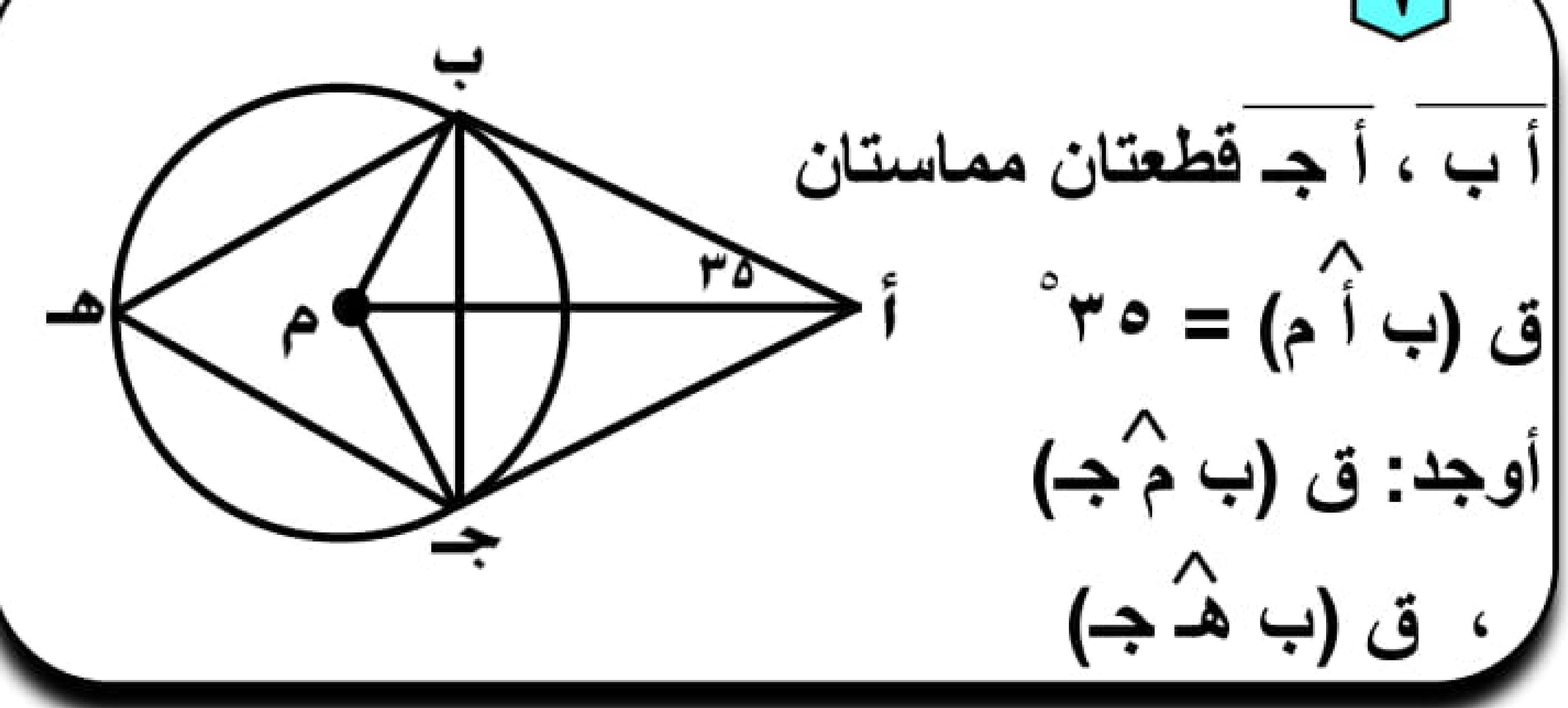
$\because$ ب هـ = ب س قطعتان مماستان

$\therefore$ ب هـ = ٤ سم

$\therefore$ ب جـ = ٤ + ٥ = ٩ سم

$\therefore$ محيط = ٧ + ٨ + ٩ = ٢٤ سم

٧



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطعتان مماستان

ق ($\hat{}$ب أ م) = ٣٥°

أوجد: ق (ب $\hat{\text{م}}$ جـ) ، ق (ب $\hat{\text{هـ}}$ جـ)

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

٦

م ، ن دائرتان متماستان في د

$\overleftrightarrow{\text{د جـ}}$ مماس مشترك عند د

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك عند أ ، ب

اثبت أن: ١) جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

٢) أ د $\perp$ ب د

الحل

في الدائرة م $\because$ جـ د ، جـ أ قطعتان مماستان

$\therefore$ جـ د = جـ أ ← (١)

في الدائرة ن $\because$ جـ د ، جـ ب قطعتان مماستان

$\therefore$ جـ د = جـ ب ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: جـ أ = جـ ب

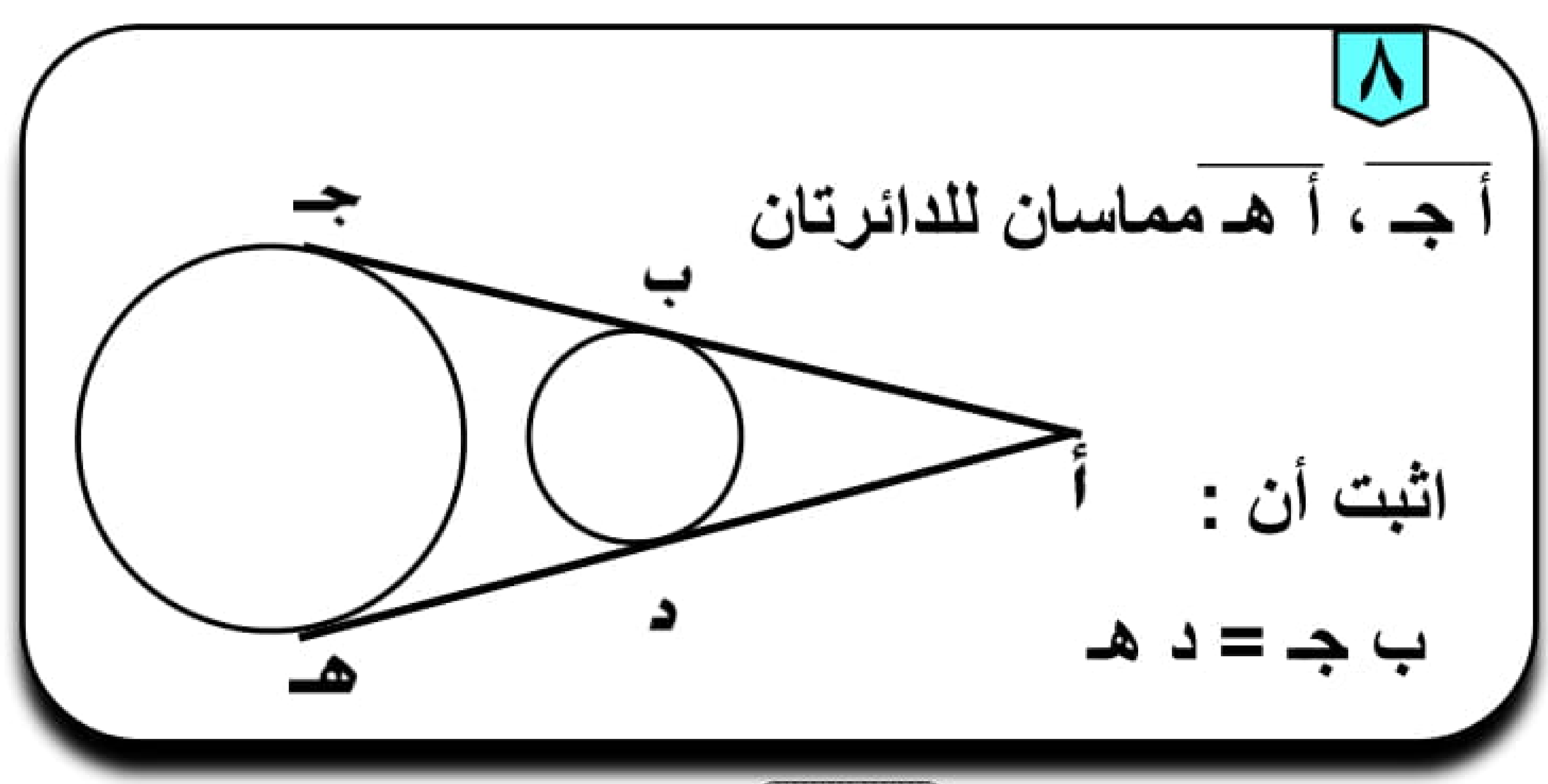
$\therefore$ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ **المطلوب الأول**

في $\triangle$ أ د ب : $\because$ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ $\therefore$ د جـ متوسط

$\because$ د جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب $\therefore$ د جـ خارج من زاوية قائمة

$\therefore$ $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب د}}$ **المطلوب الثانى**

٨



$\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ مماسان للدائرتان

اثبت أن : ب جـ = د هـ

الحل

....

....

....

....

....

....

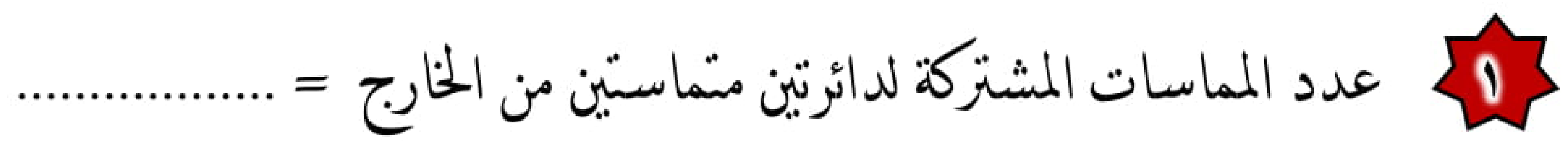
....

....

....



7 تمارين



١) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج = ...

أ) صفر   ب) ١   جـ) ٢   د) ٣

٢) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتان هو ....

أ) ١   ب) ٢   جـ) ٣   د) ٤

٣) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل = ...

أ) صفر   ب) ١   جـ) ٢   د) ٣

٤) المماسان المرسومان من نهايتى قطر في دائرة يكونان ....

أ) متوازيان   ب) منطبقان   جـ) متقاطعان   د) متساويان في الطول

٥) القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة يكونان ....

أ) متوازيتان   ب) متعامدتان   جـ) متطابقتان   د) منطبقتان

٦) في الشكل المقابل : جـ ب ، جـ د قطعتان مماستان

ق (جـ) = ٧٠° فإن ق(د ب) الأصغر = ...°

أ) ٧٠   ب) ١١٠   جـ) ١٢٥   د) ٥٥

---

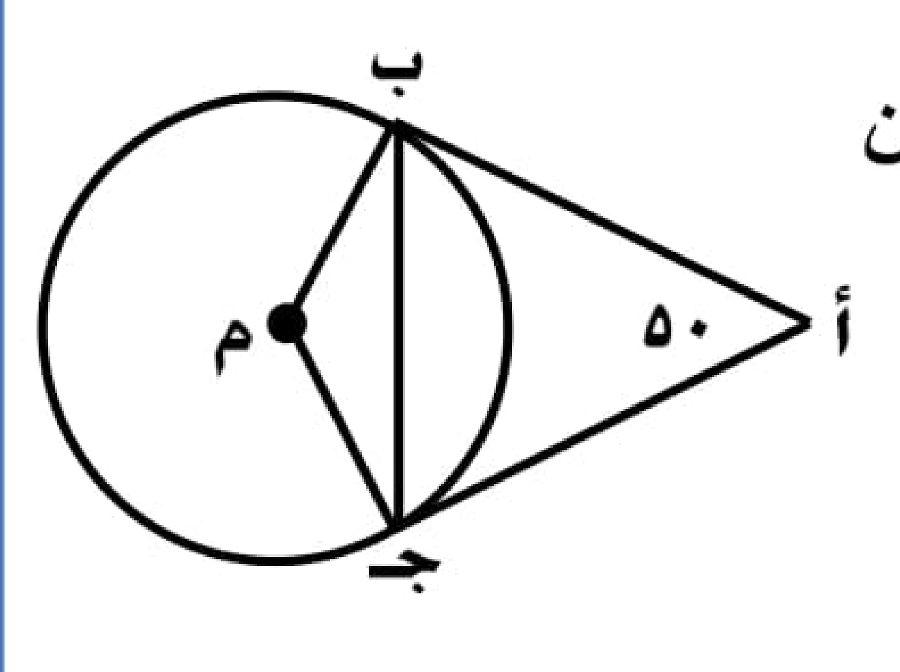
١) في الشكل المقابل:

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٥٠°

أوجد : ١) ق (أ $\hat{ب}$ جـ)

٢) ق ($\hat{م}$)



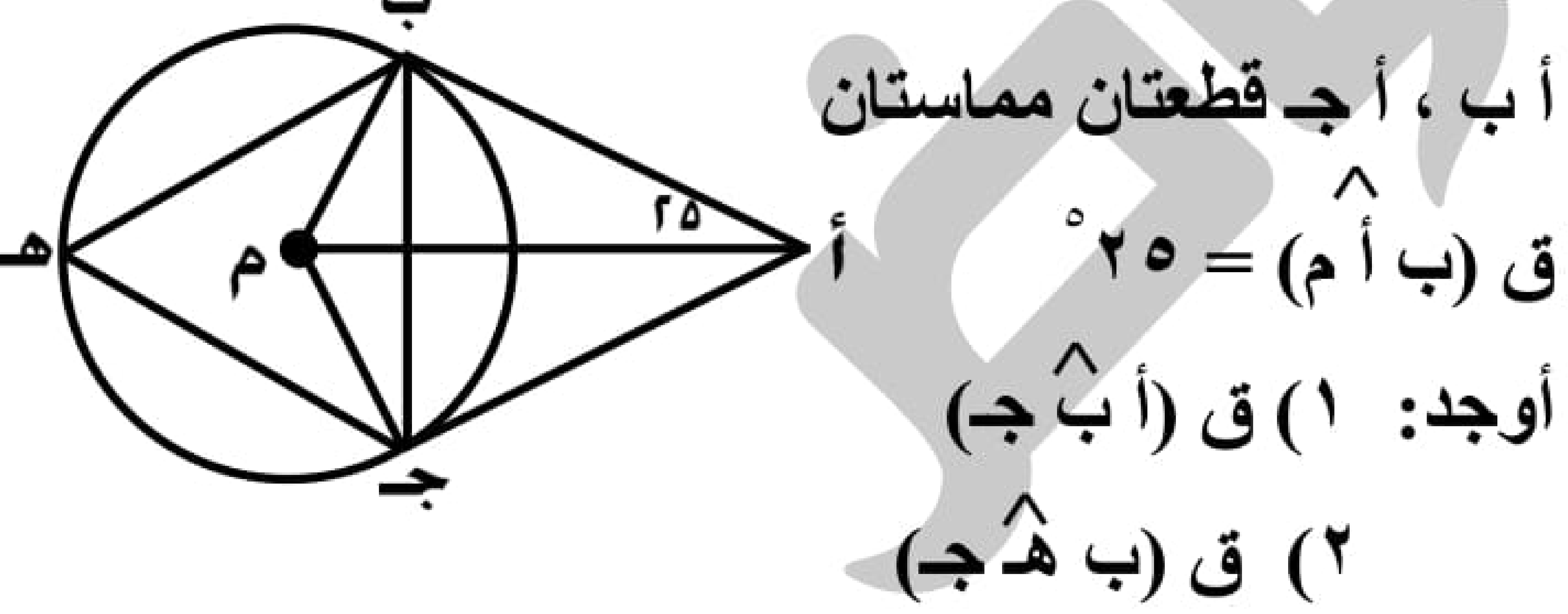
٣) في الشكل المقابل:

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ق (ب $\hat{أ}$ م) = ٢٥°

أوجد: ١) ق (أ $\hat{ب}$ جـ)

٢) ق (ب $\hat{هـ}$ جـ)



٢) في الشكل المقابل:

أ جـ ، أ ب مماستان

أ ب = ١٢ سم

، جـ م = ٥ سم

أوجد طول: أ جـ ، أ د

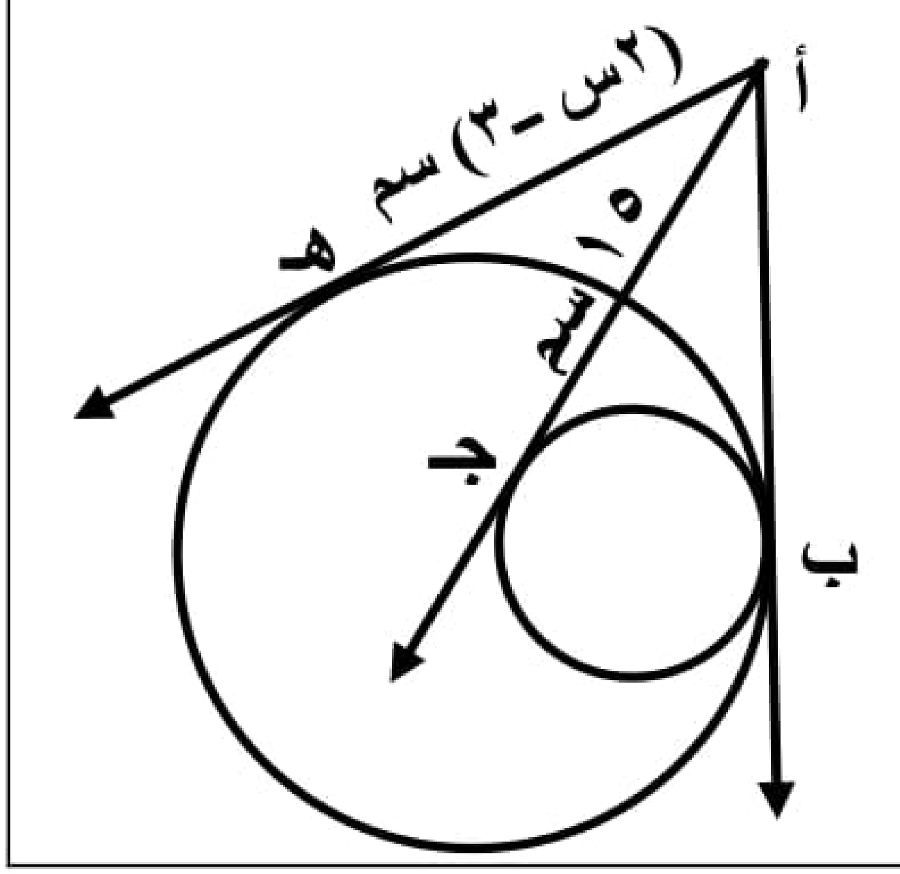
٤) في الشكل المقابل:

أ ب ، أ جـ ، أ هـ مماسات

أ جـ = ١٥ سم

أ هـ = (٢س ـ ٣) سم

أوجد قيمة س





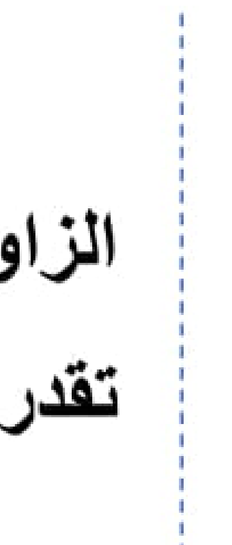
الزاوية المماسية

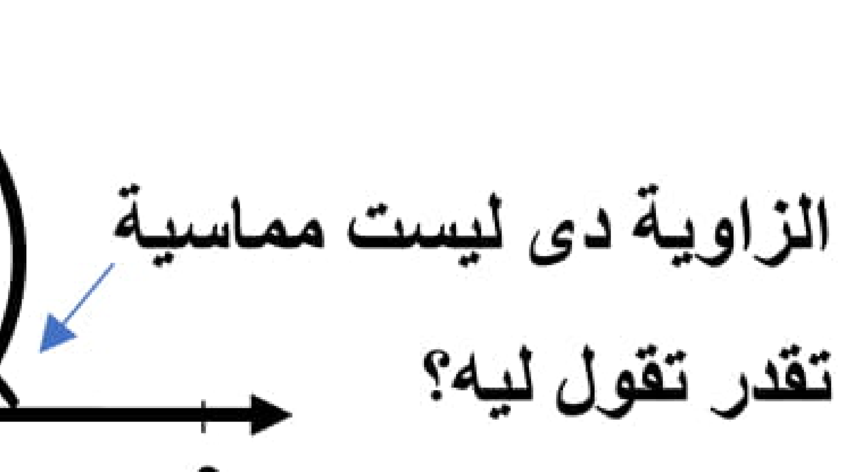
الدرس الثامن 8

الزاوية المماسية: هي زاوية رأسها على الدائرة ومحصورة بين وتر ومماس

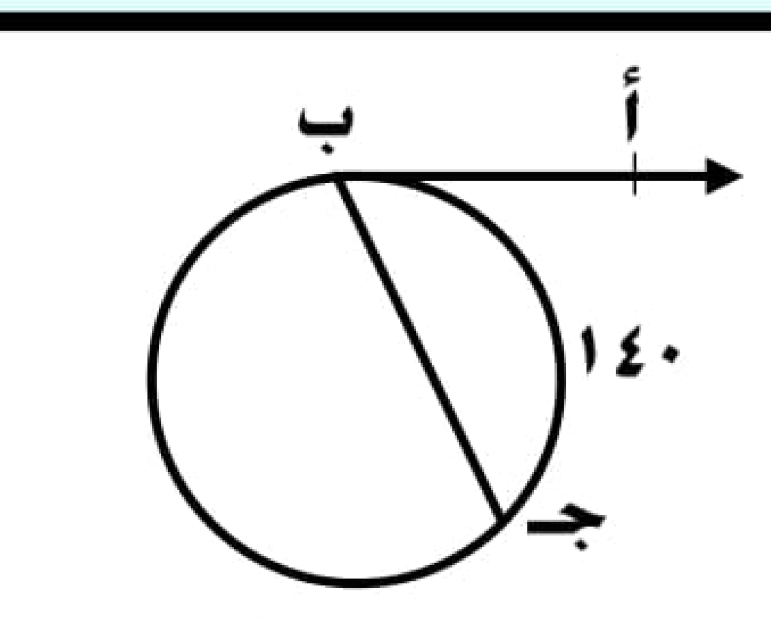


- ب أ جـ زاوية مماسية
- القوس المقابل لها هو $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$





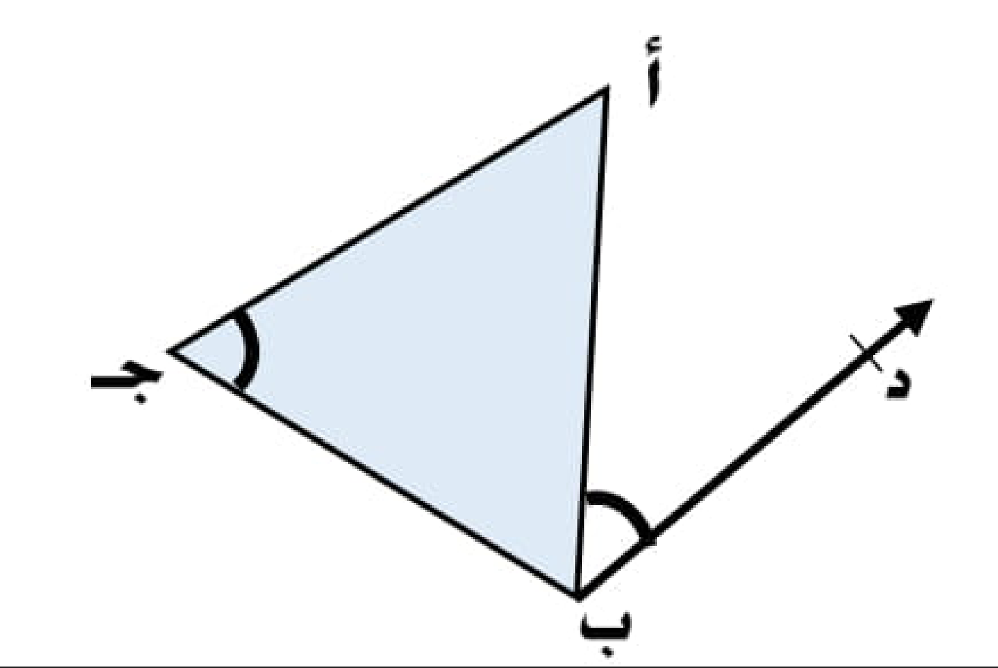
الزاوية دى ليست مماسية
تقدر تقول ليه؟

قياس الزاوية المماسية = نصف قياس القوس المقابل لها زى المحيطية بالضبط	قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس	قياس الزاوية المماسية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس
 ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) ∴ ق(أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٧٠°	ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) المماسية = ق ($\hat{\text{د}}$) المحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$ ∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٦٥°	ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{\text{م}}$) المركزية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{جـ أ}}$ ∴ ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٤٩°

لإثبات أن $\overleftarrow{\text{ب د}}$ مماس للدائرة التي تمر برؤوس △ أ ب جـ

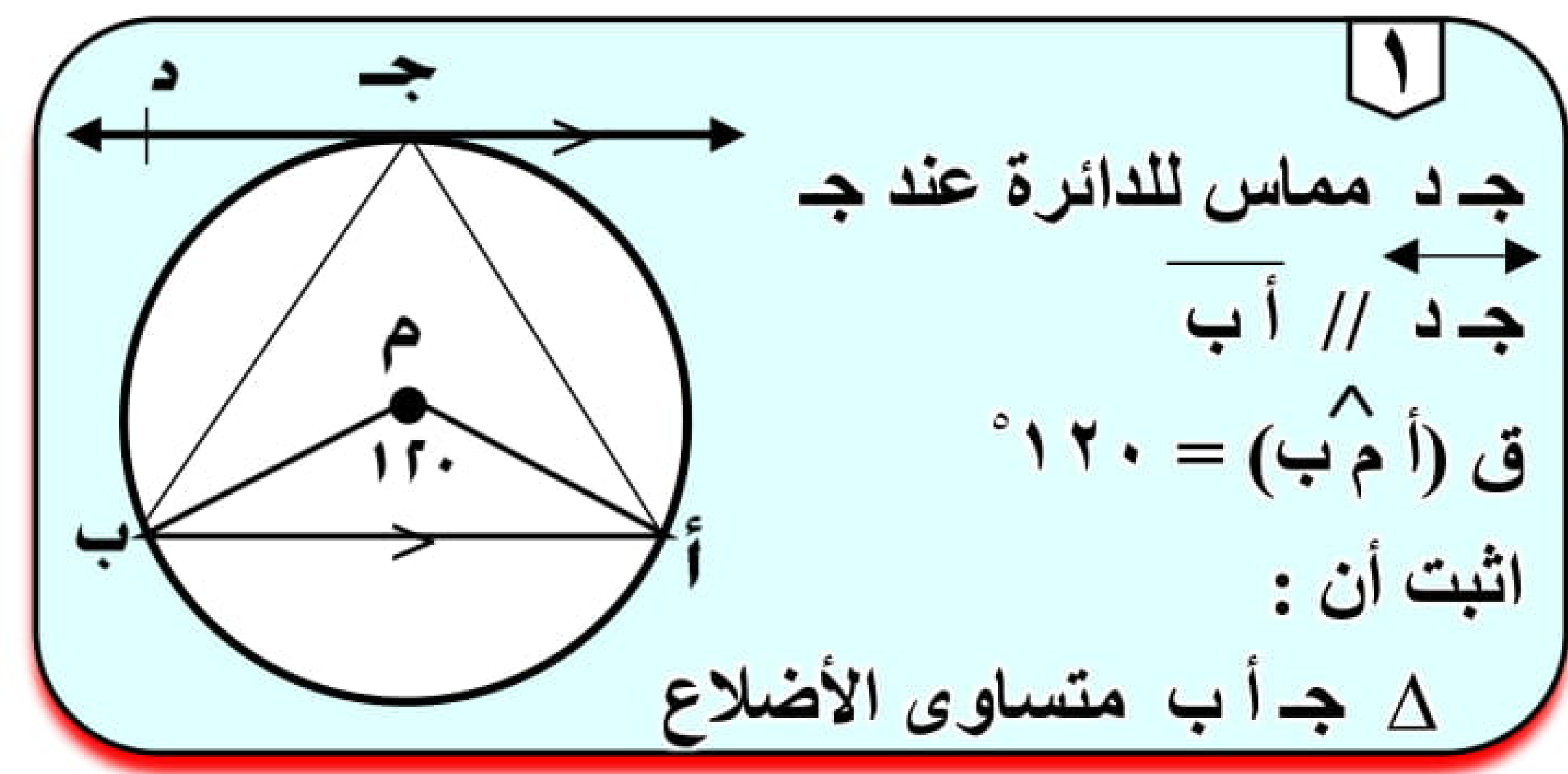
نثبت أن :

ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق ($\hat{\text{جـ}}$)



تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

١



جـ د مماس للدائرة عند جـ

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

ق (أ $\hat{\text{م}}$ ب) = ١٢٠°

اثبت أن :

Δ جـ أ ب متساوى الأضلاع

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ق (د $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ق (جـ $\hat{\text{ب}}$ أ) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (د $\hat{\text{جـ}}$ ب) المماسية = ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) المحيطية ⟵ (٢)

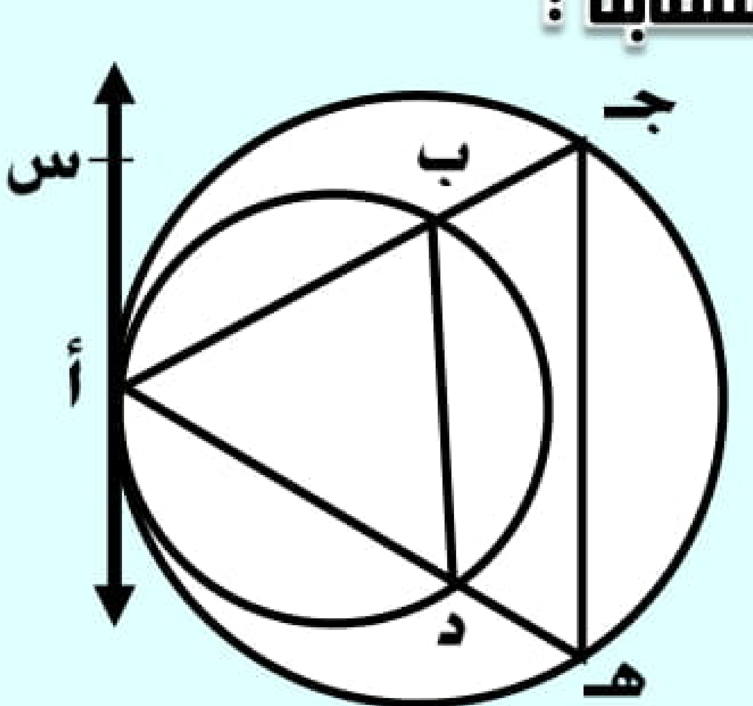
من ١ ، ٢ ينتج أن : ق (جـ $\hat{\text{ب}}$ أ) = ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب)

∴ Δ جـ أ ب متساوى الساقين

∵ ق ($\hat{\text{م}}$) المركزية = ١٢٠° ∴ ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٦٠°

∴ Δ جـ أ ب متساوى الأضلاع

٢ **فى الشكل المقابل :**



أ س مماس مشترك

لدائرتين متماستين

اثبت أن :

$\overline{\text{ب د}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$

الحل

فى الدائرة الصغرى :

∵ ق (س $\hat{\text{أ}}$ ب) المماسية = ق (أ $\hat{\text{د}}$ ب) المحيطية ⟵ (١)

مشتركتان في القوس أ ب

فى الدائرة الكبرى :

ق (س $\hat{\text{أ}}$ جـ) المماسية = ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ جـ) المحيطية ⟵ (٢)

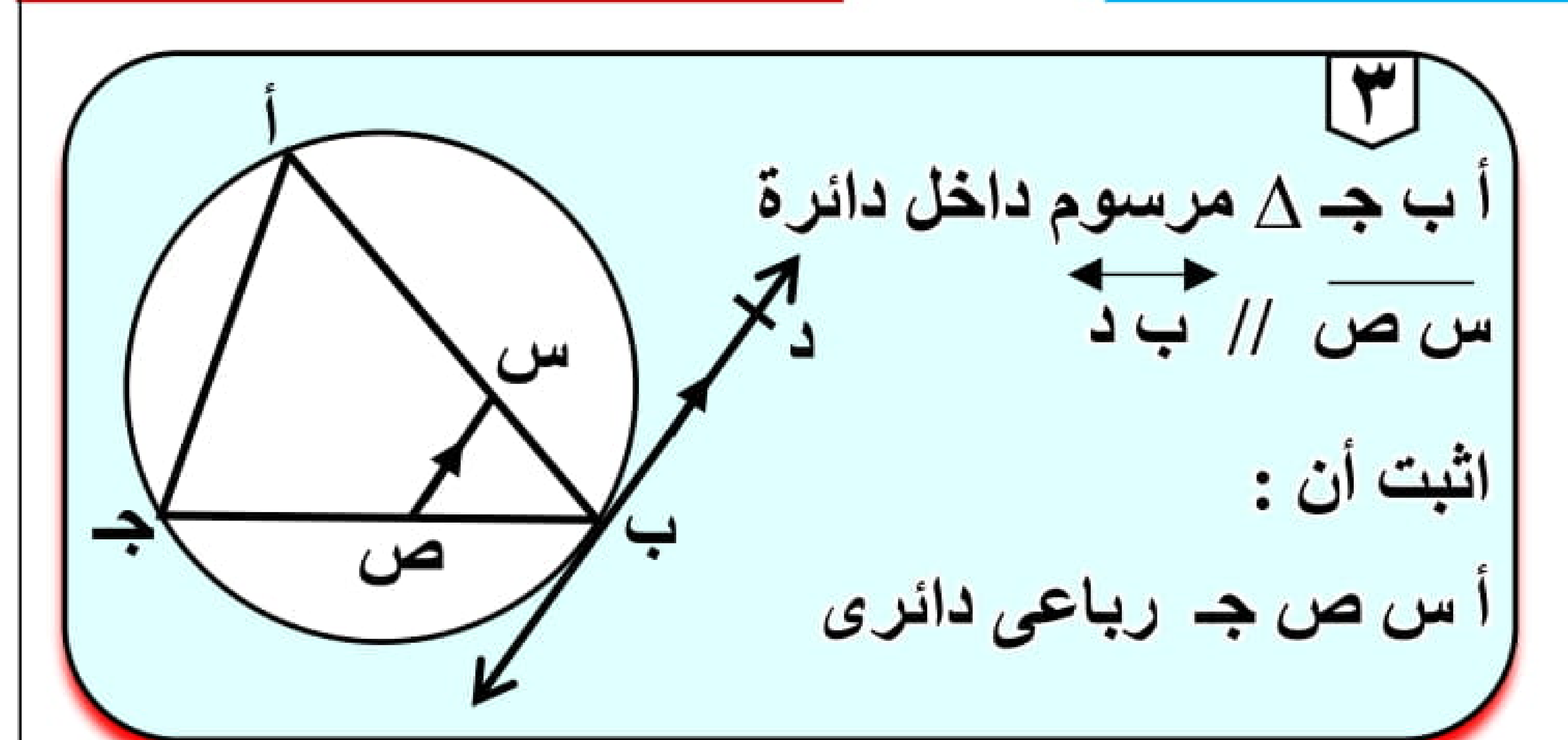
لأنهما مشتركتان في القوس $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (أ $\hat{\text{د}}$ ب) = ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ جـ) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{ب د}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$

٣



أ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

اثبت أن :

أ س ص جـ رباعى دائرى

الحل

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

∴ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق (ص $\hat{\text{س}}$ ب) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) المماسية = ق ($\hat{\text{جـ}}$) المحيطية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (ص $\hat{\text{س}}$ ب) = ق ($\hat{\text{جـ}}$)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى

٤ **فى الشكل المقابل :**

جـ أ = جـ ب

ق (ب $\hat{\text{أ}}$ د) = ١٣٠°

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٦٥°

اثبت أن: $\overleftarrow{\text{أ د}}$

مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

الحل

∵ جـ أ = جـ ب

∴ ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٦٥°

∴ ق (د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ١٣٠ ـ ٦٥ = ٦٥°

∴ ق (د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق ($\hat{\text{ب}}$)

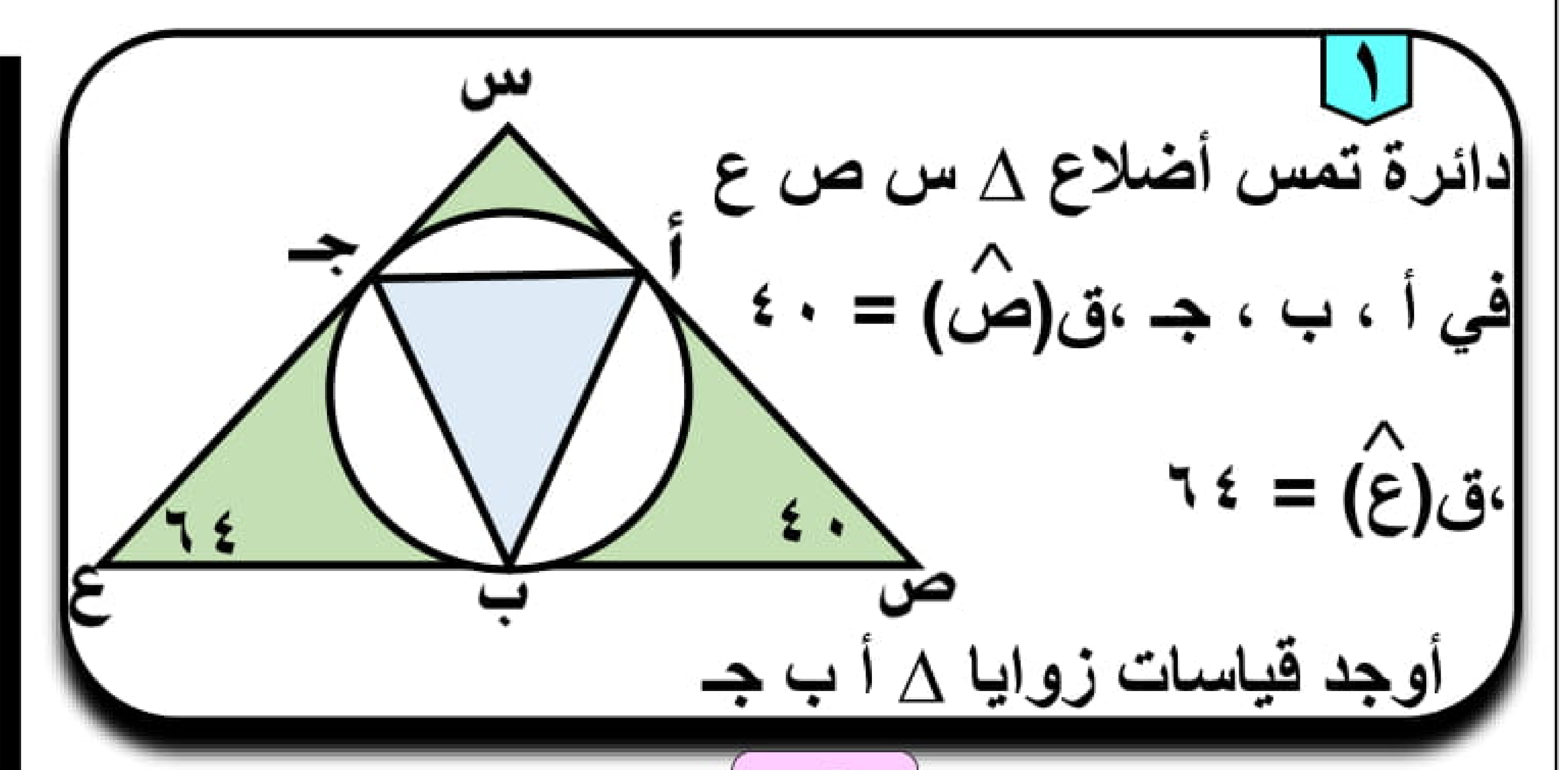
∴ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ



١

دائرة تمس أضلاع △ س ص ع في أ ، ب ، جـ ، ق(ص^) = ٤٠ ، ق(ع^) = ٦٤

أوجد قياسات زوايا △ أ ب جـ



الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

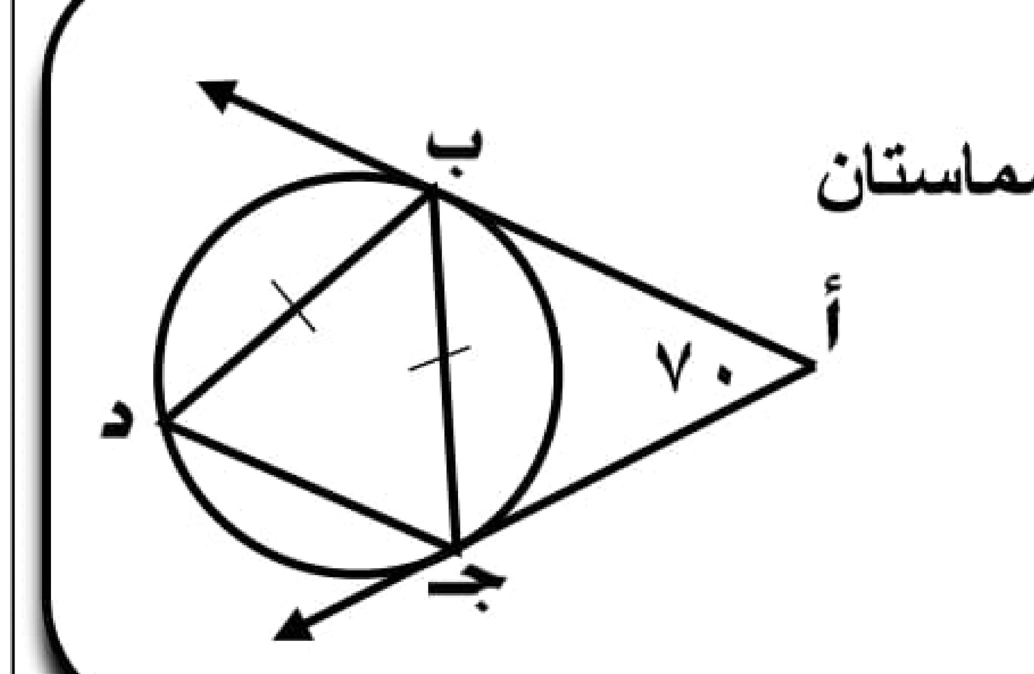
٢

أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان

ب جـ = ب د

ق (أ^) = ٧٠°

أوجد: ق (أ ب^ د)



الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

٣

أ ب جـ △ قائم في أ

ق (د أ^ ب) = ٦٠° ، أ جـ = ٤سم

ب جـ = ٨ سم ، اثبت أن:

أ د مماس للدائرة المارة برؤوس أ ب جـ

د
أ
٦٠
٤ سم
جـ
٨ سم
ب

الحل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

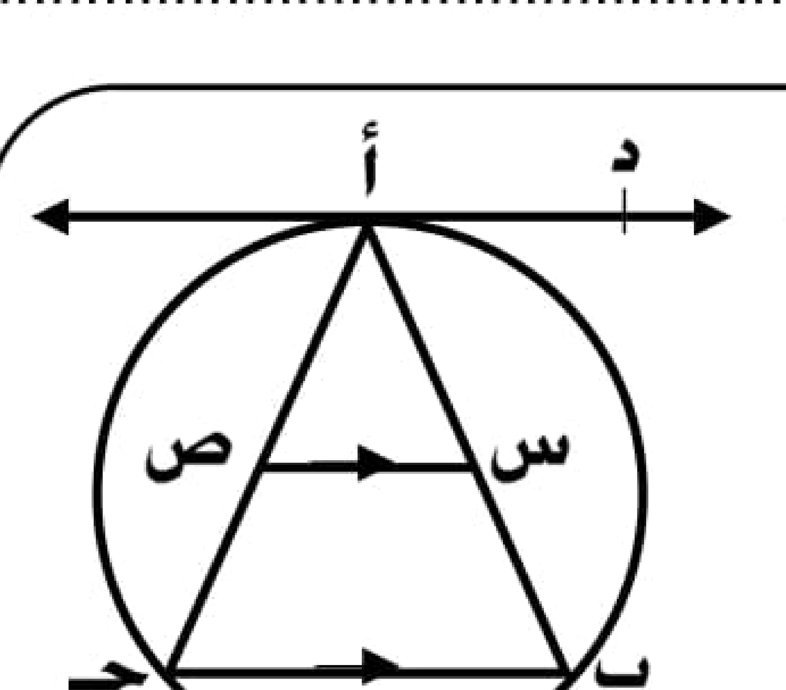
٤

أ ب جـ △ مرسوم داخل دائرة

أ د مماس للدائرة

س ص // ب جـ

اثبت أن: أ د مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ س ص



الحل

....

....

....

....

....

....

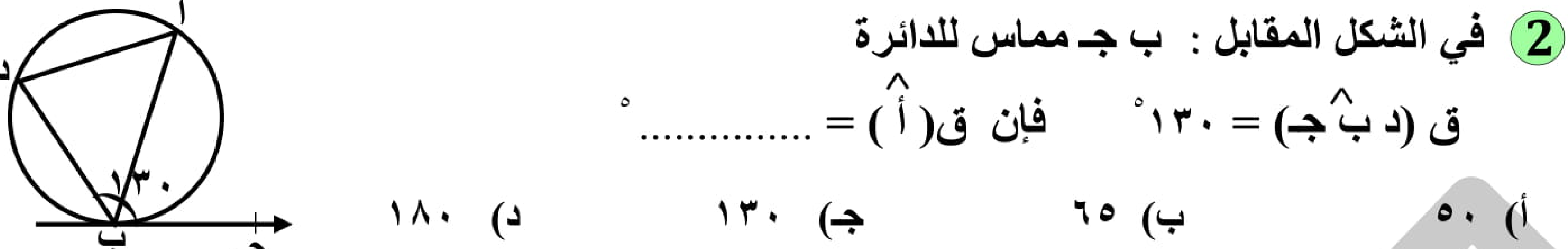
....

....

....

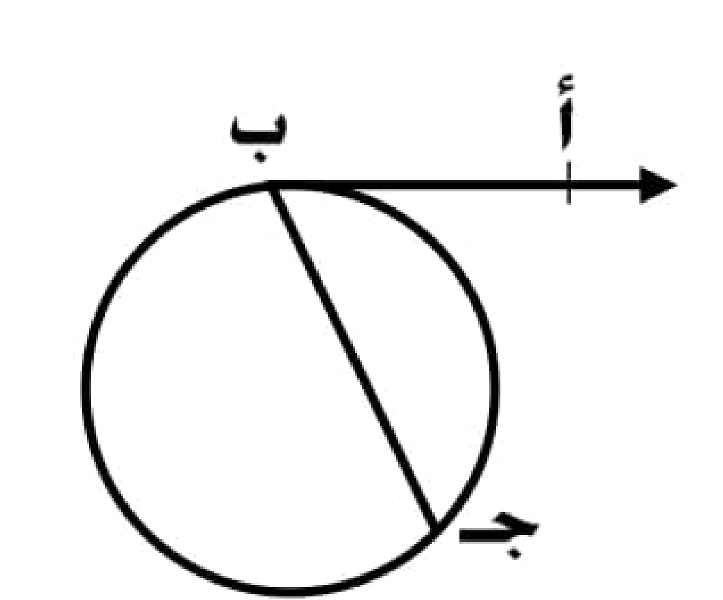


اختر الإجابة الصحيحة:



1 الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين ....

أ) وتران ب) مماسان جـ) وتر ومماس د) وتر و قطر



2 في الشكل المقابل : ب جـ مماس للدائرة

ق (د ب̂ جـ) = ١٣٠° فإن ق(أ̂) = ...°

أ) ٥٠ ب) ٦٥ جـ) ١٣٠ د) ١٨٠

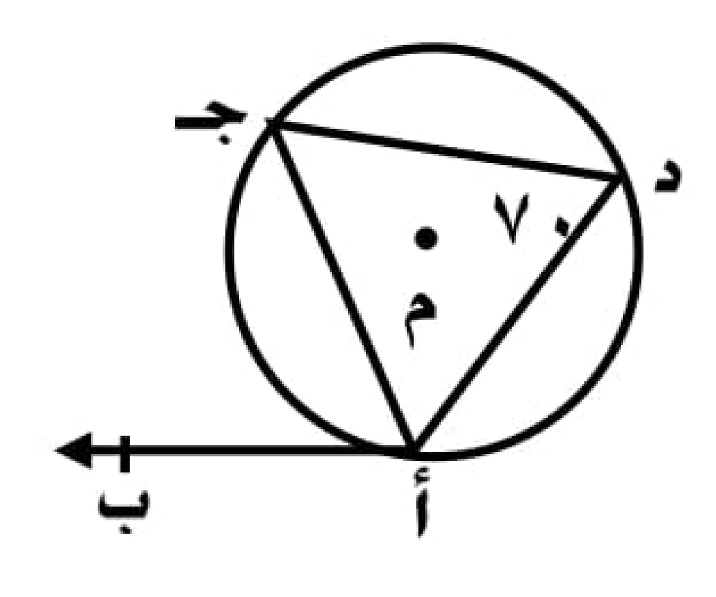
3 في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة

ق (ب جـ⌢) = ثلث قياس الدائرة فإن ق(أ ب̂ جـ) = ...°

أ) ٦٠ ب) ٩٠ جـ) ١٢٠ د) ٣٠

4 قياس القوس المقابل لزاوية مماسية قياسها ٦٠ يساوى ....°

أ) ٦٠ ب) ٣٠ جـ) ١٢٠ د) ٩٠



5 في الشكل المقابل : أ ب مماس للدائرة م عند ب

ق (جـ د̂ أ) = ٧٠ فإن ق(جـ أ̂ ب) = ...°

أ) ١٤٠ ب) ٣٥ جـ) ٧٠ د) ١١٠

---

١ في الشكل المقابل:

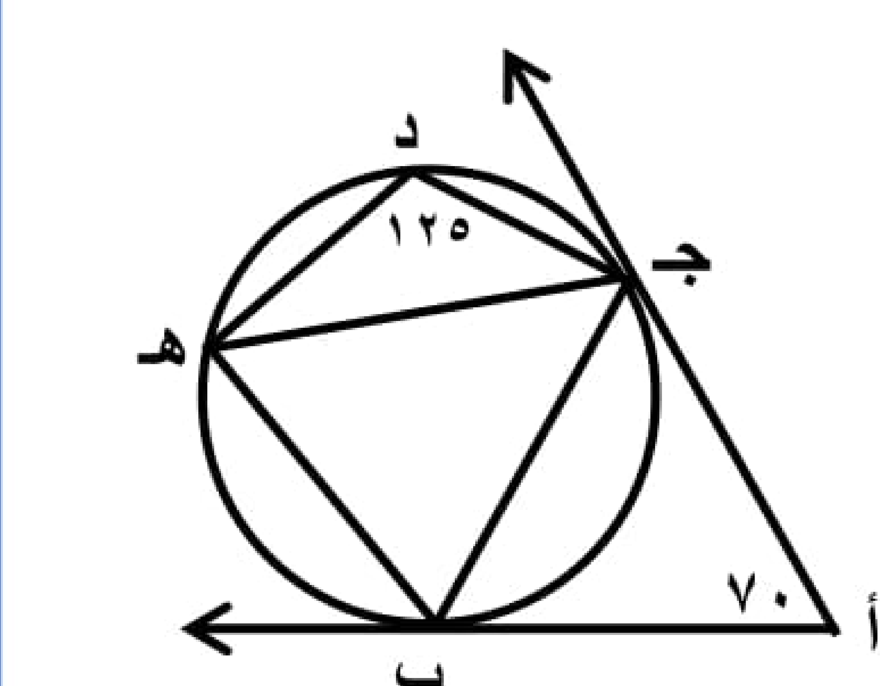
أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة

ق (أ̂) = ٧٠°

ق (جـ د̂ هـ) = ١٢٥°

اثبت أن : ١- جـ ب = جـ هـ

٢- أ جـ // ب هـ



٢ في الشكل المقابل:

د أ ، د ب مماسين

أ ب = أ جـ

اثبت أن : أ جـ مماس للدائرة

المارة برؤوس المثلث أ ب د



١ في الشكل المقابل:

أ ب قطر فى الدائرة م

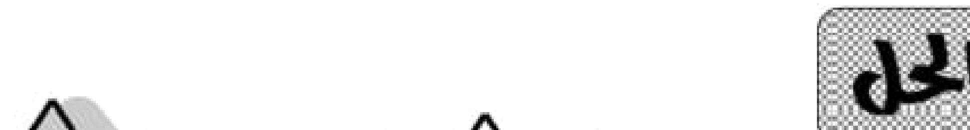
ق (جـ أ ب) = ٣٠°

د منتصف أ جـ

١- أوجد ق(ب د جـ) ، ق (أ د)

٢- اثبت أن : أ ب // جـ د

الحل



∵ ق (ب د جـ) = ق (جـ أ ب)

محيطيتان مشتركتان في جـ ب

∴ ق (ب د جـ) = ٣٠° *أولا*

∴ ق(جـ ب) = ٢ × ٣٠ = ٦٠°

∵ ق (أ د جـ) + ق (جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(أ د جـ) = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠°

∵ ق (أ د) = ق (د جـ) ∴ ق (أ د) = ١٢٠ / ٢ = ٦٠°

∴ ق(د ب أ) المحيطية = ٦٠ / ٢ = ٣٠°

∵ ق (ب د جـ) = ق (د ب أ) وهما متبادلتان ∴ أب//جـ د

٢ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ جـ وتران متساويان فى الطول

س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

ق (جـ أ ب) = ٧٠°

١- أوجد ق (د م هـ)

٢- اثبت أن س د = ص هـ

الحل

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق (م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف أ جـ ∴ م ص ⊥ أ جـ

∴ ق (م ص أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى أ س م ص = ٣٦٠°

∴ ق (د م هـ) = ٣٦٠ – (٩٠ + ٩٠ + ٧٠) = ١١٠°

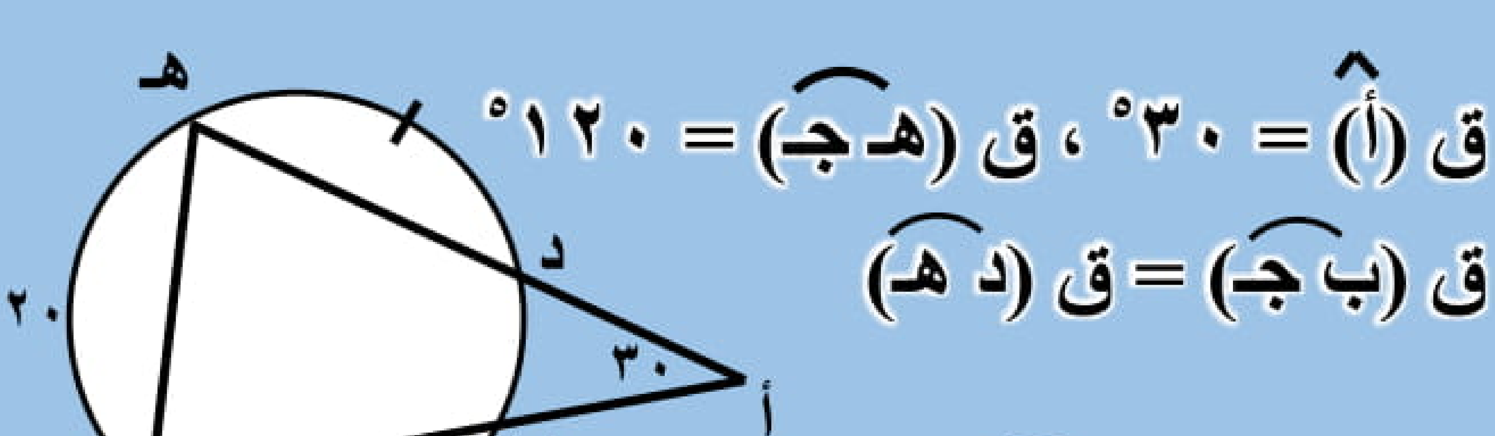
∵ أ جـ = أ ب (أوتار متساوية)

∴ م ص = م س (أبعاد متساوية) ⟵ (١)

∵ م هـ = م د (أنصاف أقطار) ⟵ (٢)

بطرح ١ من ٢ ينتج: ص هـ = س د *المطلوب الثانى*

٣ في الشكل المقابل:



ق (أ) = ٣٠° ، ق (هـ جـ) = ١٢٠°

ق (ب جـ) = ق (د هـ)

١-أوجد : ق (ب د) الأصغر

٢-اثبت أن : أ ب = أ د

الحل

من تمرين مشهور ٢ :

ق (ب د) = ق (هـ جـ) – ٢ ق(أ) = ١٢٠ – ٦٠ = ٦٠°

∵ ق (د هـ) = ق (ب جـ) بإضافة د ب للطرفين

∴ ق (ب د هـ) = ق (د ب جـ)

∴ ق (جـ) المحيطية = ق (هـ) المحيطية

∴ أ جـ = أ هـ ⟵ (١)

∵، ق (د هـ) = ق (ب جـ) ∴ د هـ = ب جـ ⟵ (٢)

بطرح ٢ من ١ ينتج أن : أ ب = أ د

٤ في الشكل المقابل:



جـ منتصف أ ب

ق (م أ ب) = ٢٠°

أوجد : ق (ب هـ د) ، ق (أ د ب)

الحل

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

∴ Δ م أ ب متساوى الساقين ∴ ق(م ب أ) = ٢٠°

∵ جـ منتصف أ ب ∴ م جـ ⊥ أ ب ∴ ق(م جـ ب) = ٩٠°

في Δ م جـ ب : ق (جـ م ب) = ١٨٠ – (٩٠ + ٢٠) = ٧٠°

∵ ق (ب هـ د) = ½ ق (د م ب)

محيطية ومركزية مشتركتان فى أ ب

∴ ق (ب هـ د) = ٣٥° *المطلوب الأول*

فى Δ أ م ب: ق (أ م ب) = ١٨٠ – (٢٠ + ٢٠) = ١٤٠°

∴ ق (أ د ب) = ق (أ م ب) المركزية = ١٤٠°

٥ في الشكل المقابل:

أ ب جـ د شكل رباعى فيه

أ ب = أ د

ق (أ ب̂ د) = ٣٠°، ق (جـ̂) = ٦٠°

اثبت أن: الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

الحل

∵ أ ب = أ د ∴ △ أ ب د متساوى الساقين

∴ ق (أ د̂ ب) = ٣٠°

∴ ق(أ̂) = ١٨٠ – (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°

∴ ق (أ̂) + ق (جـ̂) = ١٢٠ + ٦٠ = ١٨٠°

وهما زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى



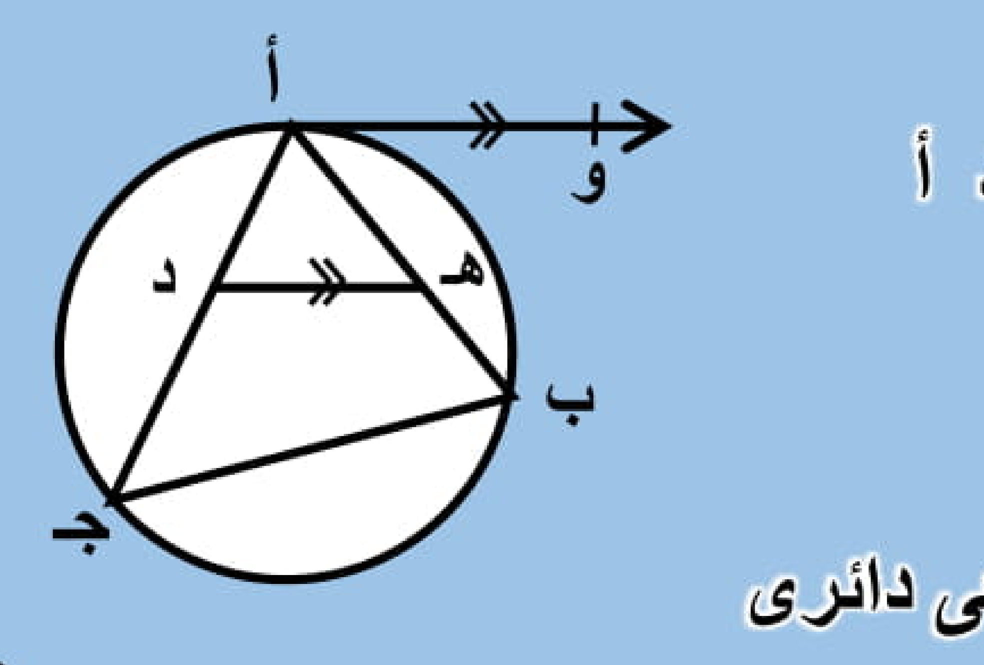
٦ في الشكل المقابل:

أ و ⟵ مماس للدائرة عند أ

أ و ⟵ // د هـ

برهن أن :

د هـ ب جـ شكل رباعى دائرى



الحل

∵ أ و // د هـ

∴ ق (و أ̂ ب) = ق (أ هـ̂ د) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (و أ̂ ب) المماسية = ق (جـ̂) المحيطية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (أ هـ̂ د) = ق (جـ̂)

ونلاحظ أن أ هـ د زاوية خارجة ، جـ هي المقابلة للمجاورة

∴ الشكل د هـ ب جـ رباعى دائرى

٧ في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

د ب ⟷ مماس للدائرة عند ب

س ص ⟷ // ب د

اثبت أن:

أ س ص جـ رباعى دائرى

الحل

∵ س ص // ب د

∴ ق (أ ب̂ د) = ق (ص س̂ ب) بالتبادل ⟵ (١)

∵ ق (أ ب̂ د) المماسية = ق (جـ̂) المحيطية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (ص س̂ ب) = ق (جـ̂)

أي أن : قياس الزاوية الخارجة = قياس المقابلة للمجاورة

∴ الشكل أ س ص جـ رباعى دائرى

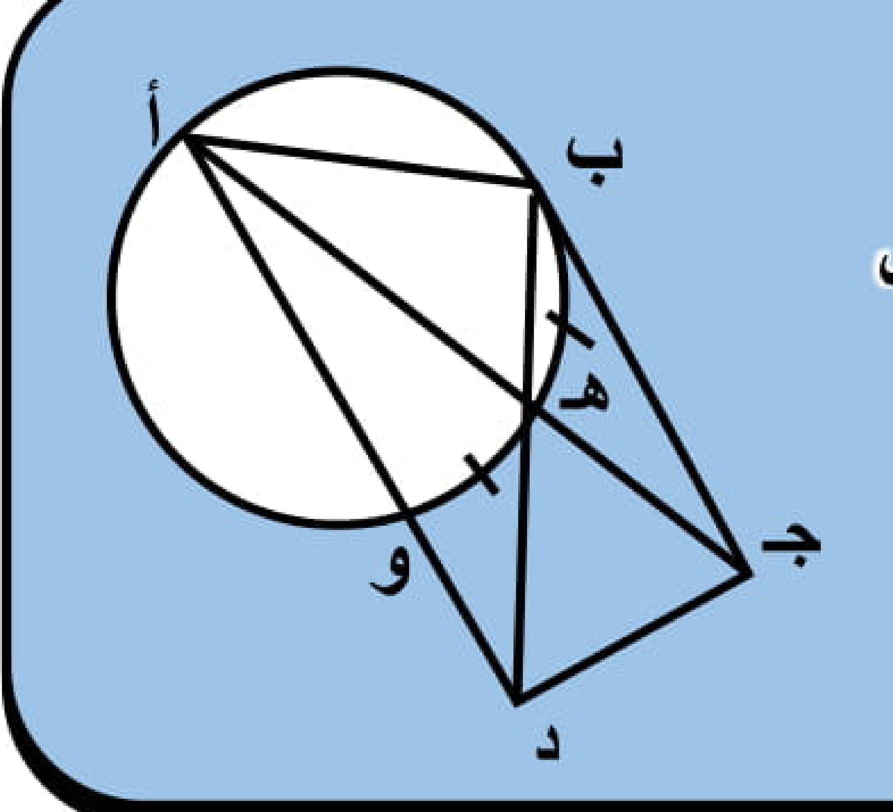
٨ في الشكل المقابل:

ب جـ مماس للدائرة عند ب

هـ منتصف ب و ⌒

اثبت أن :

أ ب جـ د رباعى دائرى



الحل

∵ ق (ب هـ ⌒) = ق (هـ و ⌒)

∴ ق (ب أ̂ هـ) = ق (هـ أ̂ و) ⟵ (١)

∵ ق (ب أ̂ هـ) المحيطية = ق (جـ ب̂ هـ) المماسية ⟵ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن :

ق (جـ ب̂ هـ) = ق (هـ أ̂ و)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وهى جـ د وفى جهة واحدة منها

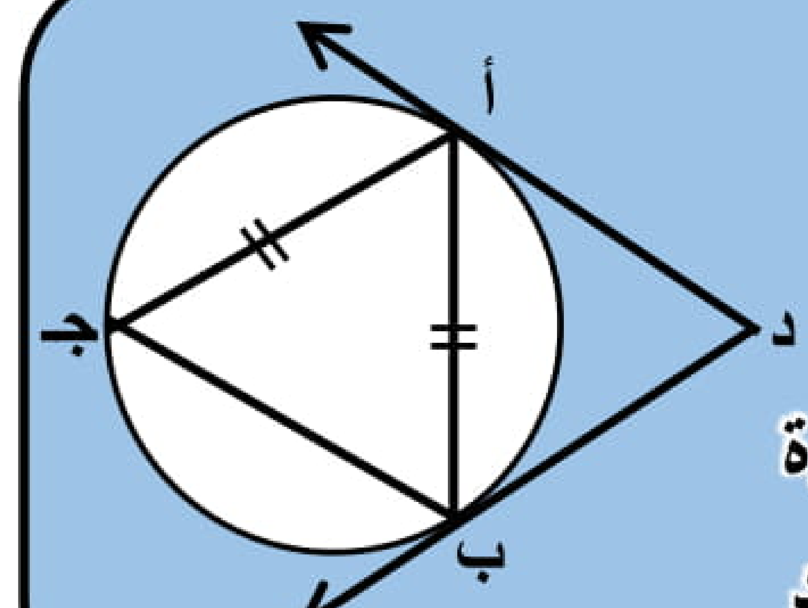
∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٩ في الشكل المقابل:

د أ ، د ب مماسين

أ ب = أ جـ

اثبت أن : أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د



الحل

في Δ أ ب جـ : ∵ أ ب = أ جـ

∴ ق (أ ب̂ جـ) = ق (أ جـ̂ ب) ← (١)

في Δ أ ب د : ∵ د أ = د ب لأنهما قطعتان مماستان

∴ ق (د أ̂ ب) = ق (د ب̂ أ) ← (٢)

∵ ق (د أ̂ ب) المماسية = ق (أ جـ̂ ب) المحيطية ← (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ وبمقارنة المثلثين ينتج أن :

ق (ب أ̂ جـ) = ق (د̂)

∴ أ جـ مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب د

١٠ في الشكل المقابل:

Δ أ ب جـ مرسوم خارج الدائرة م وتمس أضلاعه أب ، أجـ ، ب جـ فى د ، هـ ، و على الترتيب

أد= ٥سم ، ب هـ = ٤ سم ،جـ و= ٣سم

أوجد محيط Δ أ ب جـ

الحل

∵ أ د ، أ و قطعتان مماستان ∴ أ د = أ و = ٥سم

∵ ب د ، ب هـ قطعتان مماستان ∴ ب د = ب هـ = ٤ سم

∵ جـ هـ ، جـ و قطعتان مماستان ∴جـ هـ = جـ و = ٣سم

∴ أ ب = ٥ + ٤ = ٩ سم ، أ جـ = ٥ + ٣ = ٨ سم

ب جـ = ٤ + ٣ = ٧ سم

∴ محيط Δ أ ب جـ = ٩ + ٨ + ٧ = ٢٤ سم

١١ في الشكل المقابل:

أ ب ، أ جـ مماسان للدائرة

ق (أ̂) = ٧٠°

ق (جـ د̂ هـ) = ١٢٥°

اثبت أن : ١- جـ ب = جـ هـ

٢- أ جـ // ب هـ

الحل

∵ الشكل د جـ ب هـ رباعى دائرى

∴ ق (جـ ب̂ هـ) = ١٨٠ ـ ١٢٥ = ٥٥° ← (١)

∵ أ جـ ، أ ب قطعتان مماستان

∴ ق (أ جـ̂ ب) = ق (أ ب̂ جـ) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°

∵ ق (ب هـ̂ جـ) المحيطية = ق (أ جـ̂ ب) المماسية = ٥٥° ← (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق(جـ ب̂ هـ) = ق(ب هـ̂ جـ)

∴ Δ جـ ب هـ متساوى الساقين ∴ جـ ب = جـ هـ أولا

∵ ق (أ جـ̂ ب) = ق (جـ ب̂ هـ) = ٥٥°

وهما متبادلتان ∴ أ جـ // ب هـ

١٢ في الشكل المقابل:

دائرتان متماستان من الداخل فى ب

أ ب مماس مشترك للدائرتين

أجـ مماس للصغرى، أب مماس للكبرى

أ جـ = ١٥ سم ، أب = (٢س-٣) سم

أ د = (ص-٢) سم أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ أ ب = أ جـ قطعتان مماستان للدائرة الصغرى

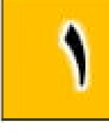
∴ أ ب = ١٥ ∴ ٢س ـ ٣ = ١٥ ٢س = ١٨

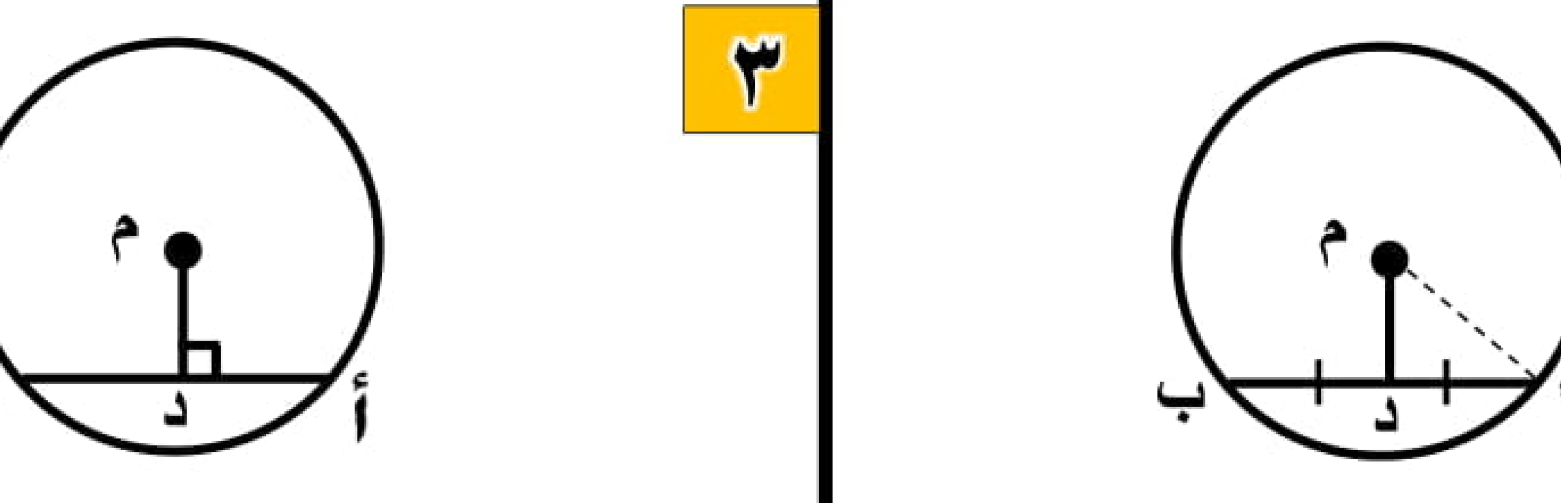
∴ س = ٩

∵ أ ب = أ د قطعتان مماستان للدائرة الكبرى

∴ أ د = ١٥ ∴ ص - ٢ = ١٥

∴ ص = ١٧





١

∵ م أ = م ب (لأنهما أنصاف أقطار)

∴ Δ م أ ب متساوى الساقين

أى أن : ق (أ^) = ق (ب^)

٢

∵ د منتصف الوتر أ ب

∴ م د ⊥ أ ب

∴ Δ م أ د قائم (يمكن تطبيق فيثاغورث)

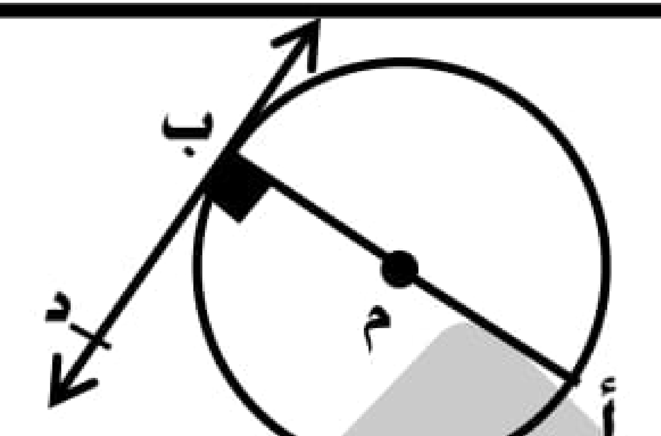
٣

∵ م د ⊥ أ ب

∴ د منتصف أ ب ∴ أ د = د ب

فإذا كان أ ب = ٨سم فإن أ د = ٤سم

٤



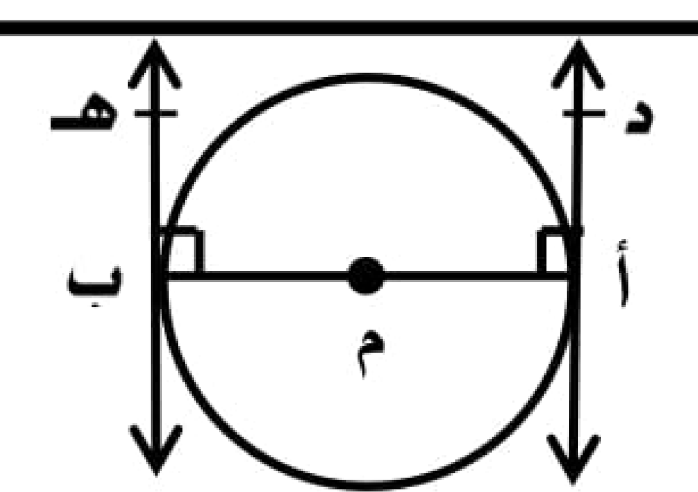
∵ ب د مماس ، أ ب قطر

∴ ب د ⊥ أ ب (المماس ⊥ القطر)

والعكس : إذا كانت ق (م ب^ د) = ٩٠°

∴ ب د مماس حيث ب نقطة التماس

٥

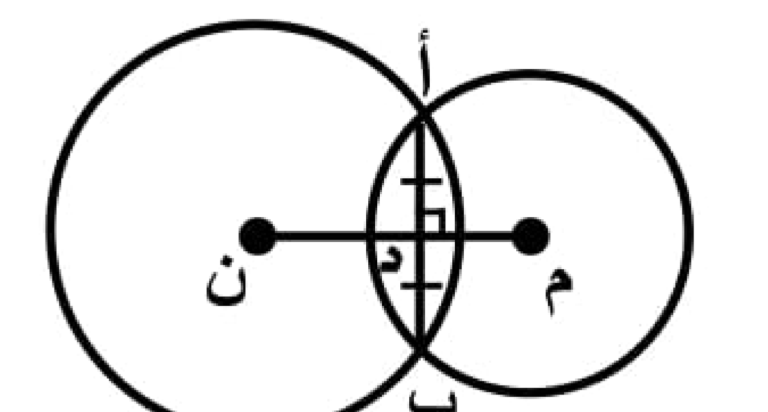


∵ د أ ، هـ ب مماسان ، أ ب قطر

∴ د أ // هـ ب

ومتنساش ان المماس ⊥ نصف القطر

٦

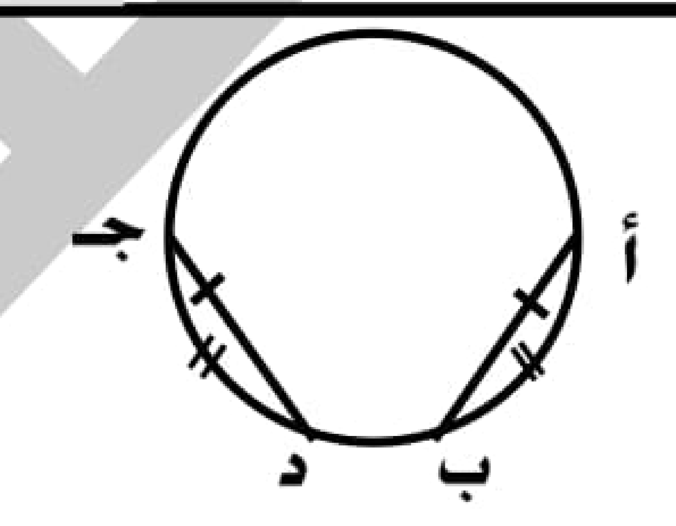


∵ أ ب وتر مشترك ، م ن خط المركزين

∴ م ن ⊥ أ ب ، م ن ينصف أ ب

خط المركزين هو محور تماثل الوتر المشترك

٧



∵ ق (أ ب⌒) = ق (جـ د⌒) الأقواس متساوية

∴ أ ب = جـ د الأوتار متساوية

والعكس صحيح

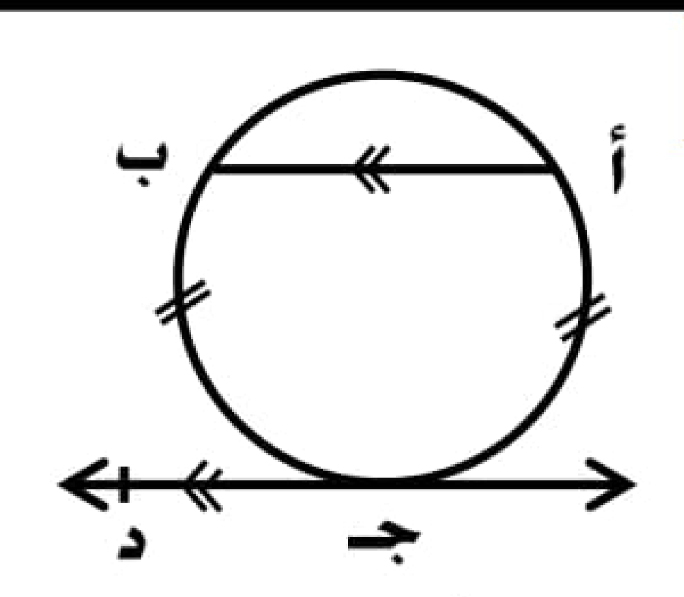
٨



∵ الوتر أ ب // الوتر جـ د

∴ ق (أ جـ⌒) = ق (ب د⌒)

٩

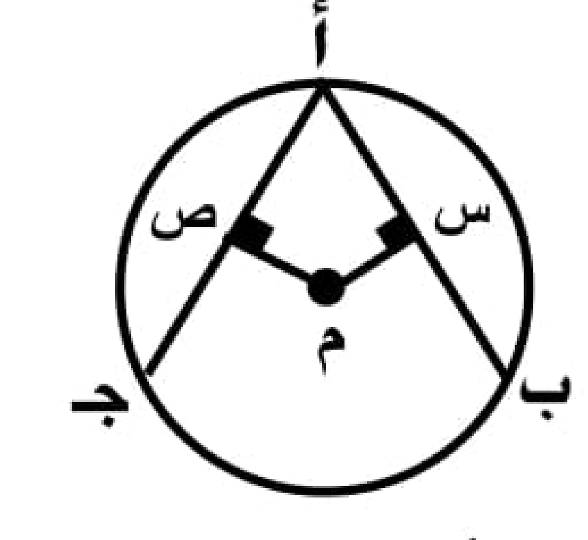


∵ الوتر أ ب // المماس جـ د

∴ ق (أ جـ⌒) = ق (ب جـ⌒)

تصميم محمود عوض معلم رياضيات

١٠



∵ أ ب = أ جـ (الأوتار متساوية)

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

والعكس صحيح

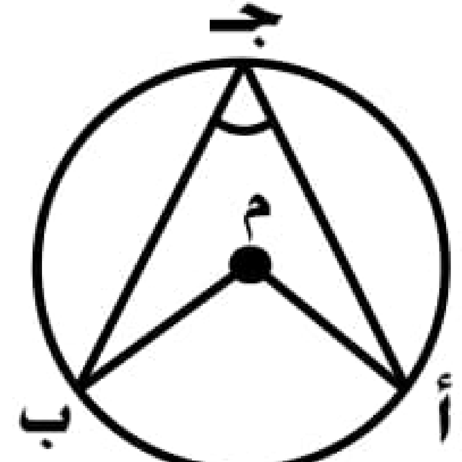
١١



ق (أ ب⌒) = ق (أ م^ ب) المركزية

ق (أ ب⌒) = ٢ ق (أ جـ^ ب) المحيطية

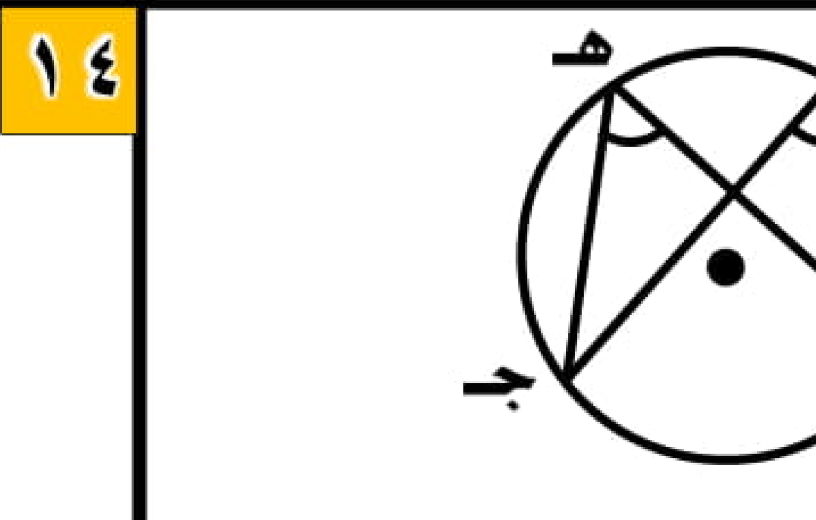
١٢



ق (جـ^) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (أ م^ ب) المركزية

ق (جـ^) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ب⌒)

١٣

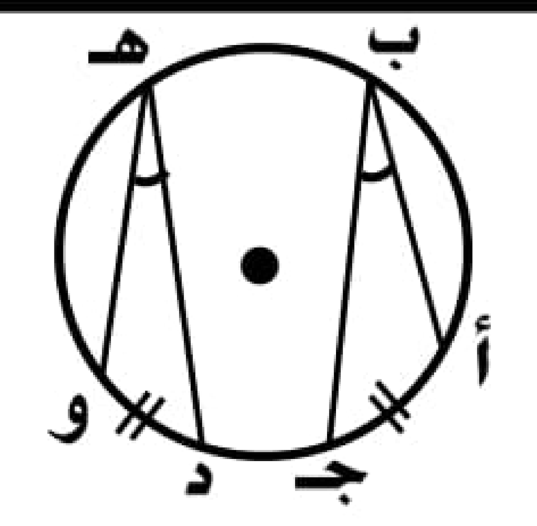


ق (ب^) = ق (هـ^)

محيطيتان مشتركتان فى القوس أ جـ

كذلك: ق (أ^) = ق (جـ^)

١٤

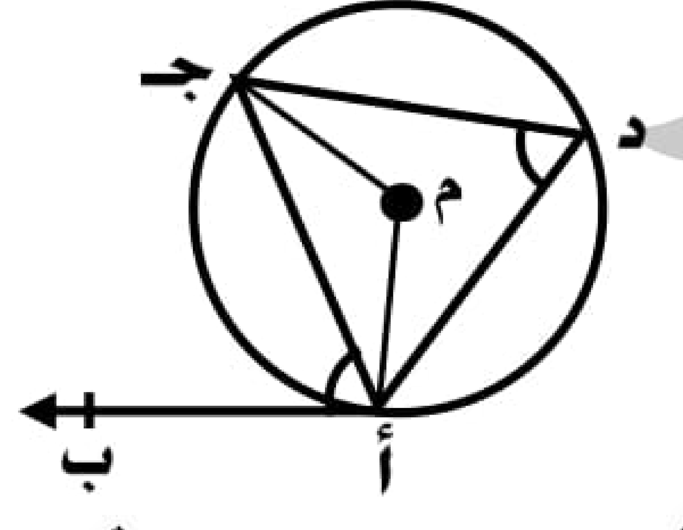


∵ ق (أ جـ⌒) = ق (د و⌒)

∴ ق (ب^) = ق (هـ^)

محيطيتان أقواسهم متساوية (والعكس صحيح)

١٥



ق (جـ أ^ ب) المماسية = ق (د^) المحيطية

= $\frac{1}{2}$ ق (م^) المركزية

المركزية ضعف المماسية وضعف المحيطية

١٦

∵ أ ب قطر

∴ ق (أ جـ^ ب) = ٩٠

محيطية مرسومة فى نصف دائرة

١٧

ق (أ ب هـ) = ق (أ ب) + ق (ب هـ)

ق (ب هـ جـ) = ق (جـ هـ) + ق (ب هـ)

لاحظ أن : القوس ب هـ مشترك بينهما

١٨

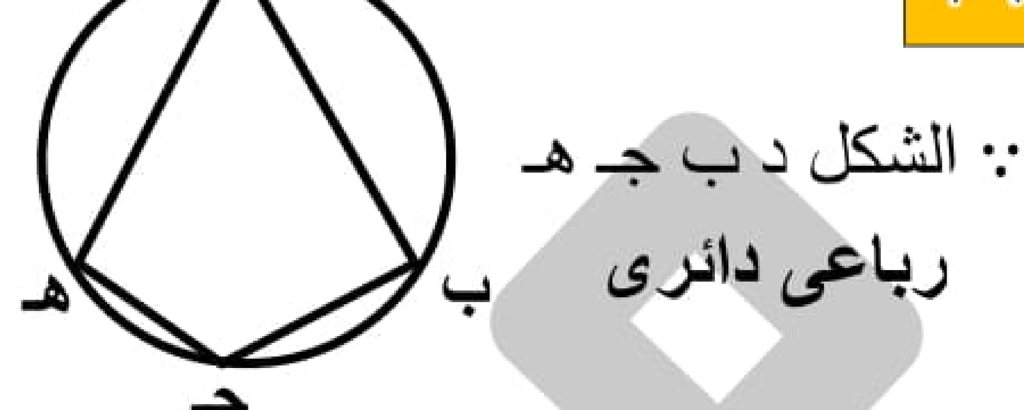
الأقواس المتساوية فى الطول **متساوية فى القياس والعكس**

∵ **طول أ ب = طول جـ د**

∴ ق (أ ب) = ق (جـ د)

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

١٩



∵ الشكل د ب جـ هـ **رباعى دائرى**

∴ ق (د^) + ق (جـ^) = ١٨٠

ق(أ^) + ق (هـ^) = ١٨٠

كل زاويتان متقابلتان مجموعهما = ١٨٠

٢٠

∵ **الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى**

∴ ق (أ ب^ هـ) الخارجة = ق (د^)

الزاوية الخارجة = المقابلة للمجاورة

٢١

∵ ب ص مماس

∴ ق (أ ب^ ص) = ٩٠

∵ س منتصف أ جـ

∴ ق(أ س^ ص) = ٩٠

∴ ق (أ ب^ ص) = ق (أ س^ ص)

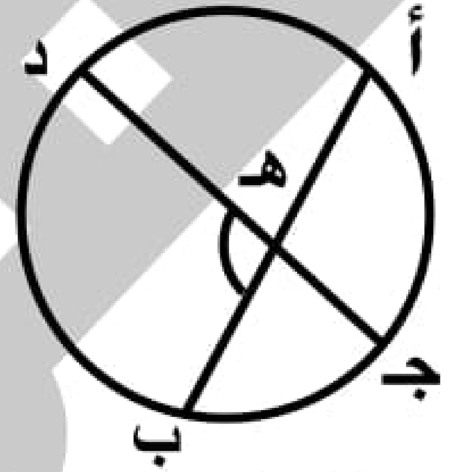
وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أ ص

∴ الشكل أ س ب ص رباعى دائرى

٢٢

تمرين مشهور ١







ق (د هـ^ ب) = ١/٢ [ق (أ جـ) + ق (د ب)]

ق (أ جـ) = ٢ ق(د هـ^ ب) − ق (د ب)

ق (د ب) = ٢ ق(د هـ^ ب) − ق (أ جـ)

٢٣

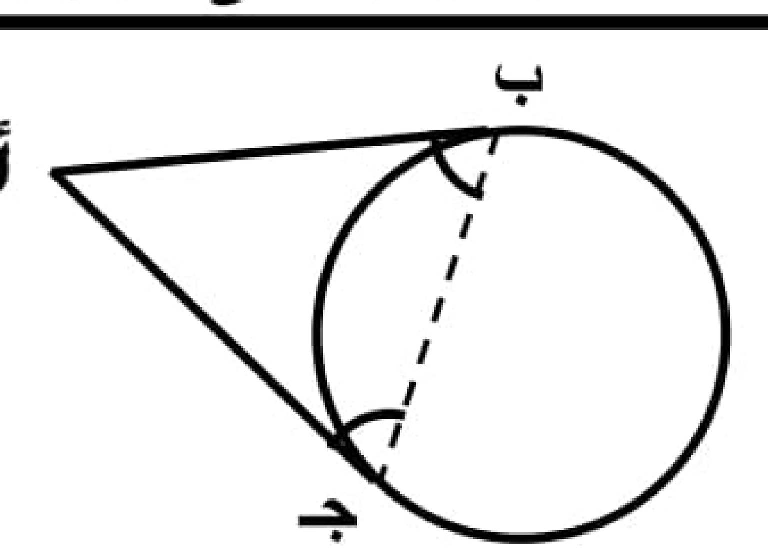
تمرين مشهور ٢

ق (هـ^) = ١/٢ [ق (أ جـ) − ق (د ب)]

ق (أ جـ) = ٢ ق(هـ^) + ق (د ب)

ق (د ب) = ق (أ جـ) − ٢ ق(هـ^)

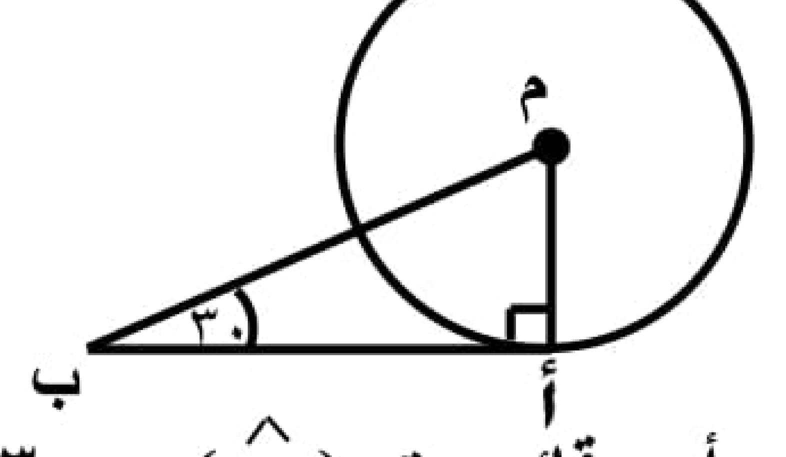
٢٤



∵ **أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان**

∴ **أ ب = أ جـ ، ق (ب^) = ق (جـ^)**

٢٥



∵ **Δ م أ ب قائم ، ق (ب^) = ٣٠**

∴ **م أ = ١/٢ م ب**

الضلع المقابل للزاوية ٣٠ = نصف طول الوتر

٢٦

إقليدس

∵ **Δ م أ ب قائم ، ب د ⊥ الوتر أ جـ**

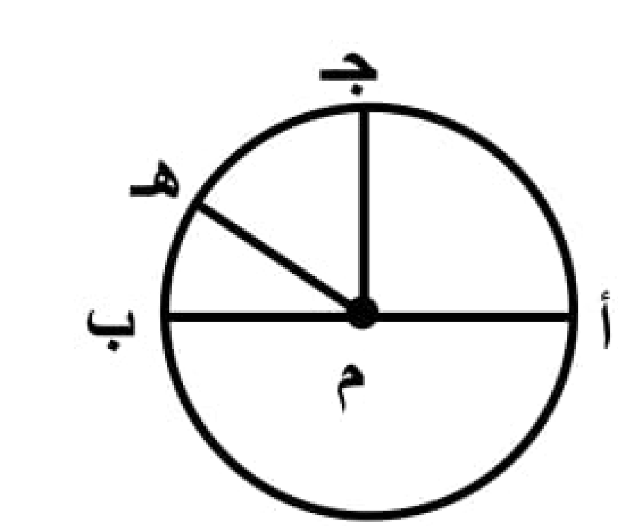
∴ **ب د = $\frac{\text{أ ب × ب جـ}}{\text{أ جـ}}$**

٢٧

لإثبات أن الشكل رباعى دائرى ابحث عن احدى الحالات الآتية :

1. **زاويتان متقابلتان متكاملتان**
2. **زاوية خارجة تساوى المقابلة للمجاورة**
3. **زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها ومتساويتان**

٢٨



∵ **أ ب قطر** ∴ **ق(أ جـ ب) = ١٨٠**

∴ ق(أ جـ) + ق(جـ هـ) + ق(هـ ب) = ١٨٠

٢٩

إذا كان ق (١^) = ق (٢^)

∴ **أب جـ د رباعى دائرى**

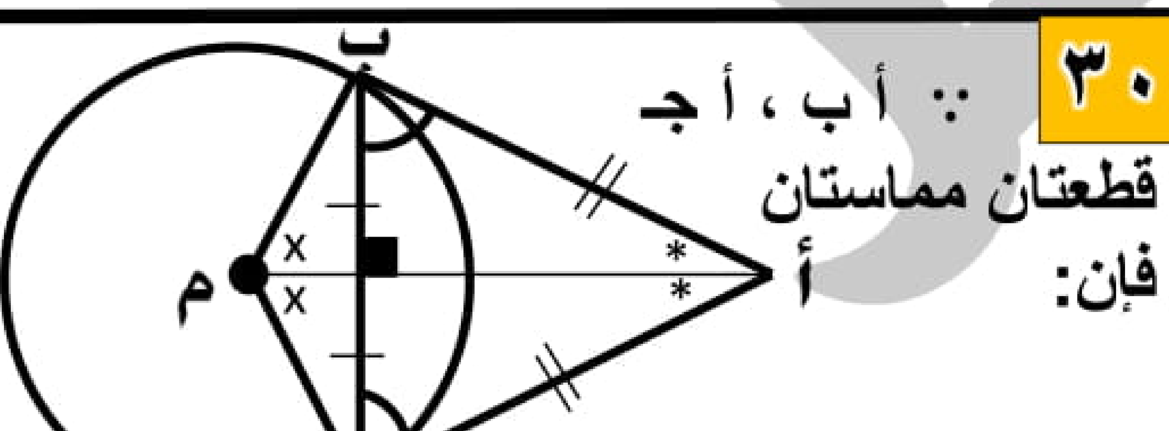
والعكس صحيح

تصميم محمود عوض
معلم رياضيات

٣٠

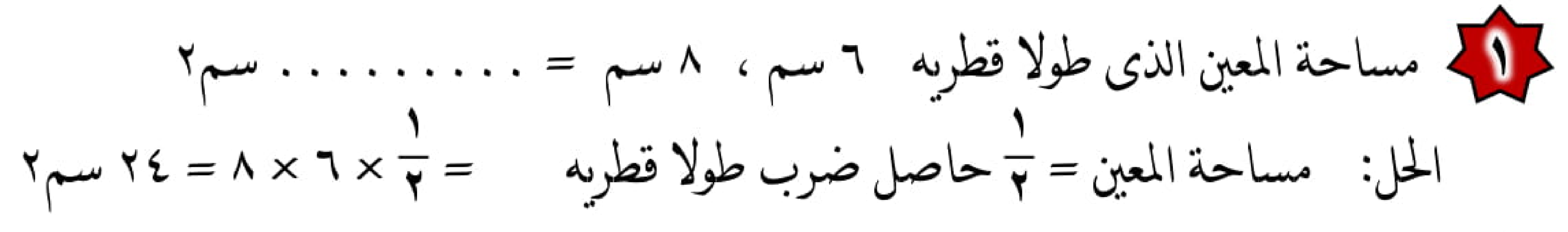
∵ أ ب ، أ جـ **قطعتان مماستان** فإن:

- **أ ب = أ جـ**
- **ق (أ ب^ جـ) = ق (أ جـ^ ب)**
- **أ م ينصف أ^ وينصف م^**
- **أ م ⊥ ب جـ**
- **أ ب م جـ رباعى دائرى**



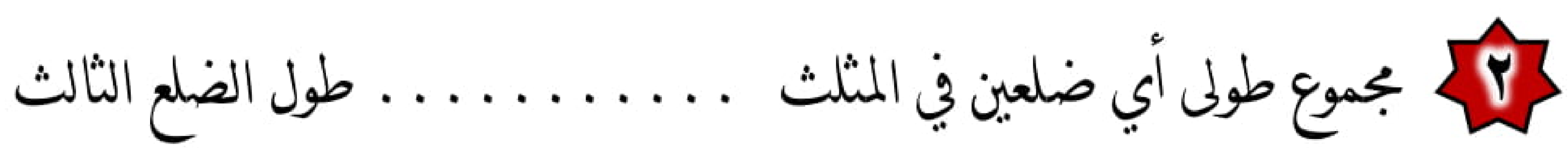




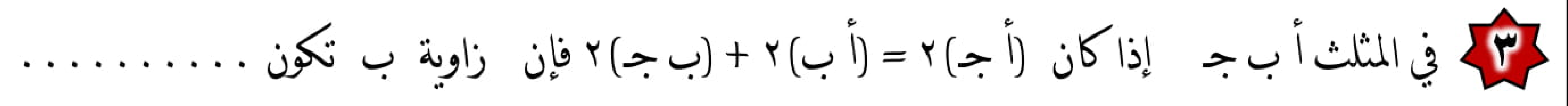


١ مساحة المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم = ... سم٢

الحل: مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم٢



٢ مجموع طولى أي ضلعين في المثلث . . . . طول الضلع الثالث



٣ في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون . . . .

٤ في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ > (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون . . . .

٥ في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ جـ)٢ > (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ فإن زاوية ب تكون . . . .

٦ قياس زاوية الشكل السداسى المنتظم = ...

٧ عدد محاور تماثل المربع = ... ، عدد محاور تماثل المستطيل = ...

٨ ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س − ٤ ص + ١٢ = ٠ هو . . . .

٩ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

١٠ عدد محاور تماثل نصف الدائرة . . . . عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين

١١ القطران المتساويان في الطول وغير متعامدان في . . . .

١٢ مربع محيطه ٢٠ سم تكون مساحته = ... سم٢

١٣ إذا كان أ ب قطر فى دائرة م حيث أ (٣ ، −٥) ، ب (٥ ، ١) فإن مركز الدائرة م هو

١٤ دائرة محيطها ٨ π فإن طول قطرها = ...

١٥ في المثلث القائم طول المتوسط الخارج من الزاوية القائمة يساوى . . . .

١٦ في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى . . . .

١٧ عدد المستطيلات في الشكل المقابل . . . .

انتهت المذكرة مع تمنياتى الخالصة لكم بالتوفيق والنجاح والاستمرار في النجاح